מתמטיקה לכלכלנים

תוכן העניינים

1. משוואות מסוגים שונים ..... (ללא ספר)

2. אי-שוויונים מסוגים שונים ..... (ללא ספר)

3. הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות 1

4. גבול של פונקציה 27

5. חישוב נגזרת של פונקציה 43

6. משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי 56

7. כלל לופיטל 67

8. חקירת פונקציה 73

9. בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון) 96

10. אינטגרלים מיידיים 108

11. שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת) 111

מתמטיקה לכלכלנים

פרק 1 - משוואות מסוגים שונים

תוכן העניינים

1. משוואה ממעלה ראשונה ..... (ללא ספר)
2. שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה ..... (ללא ספר)
3. משוואה ממעלה שנייה ..... (ללא ספר)
4. משוואות עם מכנה ..... (ללא ספר)
5. פתרון משוואות ממעלה שלישית ..... (ללא ספר)
6. משוואות מעריכיות ..... (ללא ספר)
7. משוואות לוגריתמיות ..... (ללא ספר)
8. משוואות עם פרמטרים ..... (ללא ספר)
9. משוואות עם שורשים ..... (ללא ספר)
10. משוואות עם ערך מוחלט ..... (ללא ספר)
11. מערכת משוואות ממעלה שנייה ..... (ללא ספר)
12. מערכת משוואות מעריכיות ..... (ללא ספר)
13. מערכת משוואות לוגריתמיות ..... (ללא ספר)
14. מערכת משוואות מעריכיות-לוגריתמיות ..... (ללא ספר)

מתמטיקה לכלכלנים

פרק 2 - אי-שוויונים מסוגים שונים

תוכן העניינים

1. שיעורים ..... (ללא ספר)
2. אי שוויון ממעלה ראשונה ..... (ללא ספר)
3. אי שוויון ממעלה שנייה ..... (ללא ספר)
4. אי שוויון ממעלה שלישית ..... (ללא ספר)
5. אי שוויון עם מנה ..... (ללא ספר)
6. מערכת וגם ..... (ללא ספר)
7. אי שוויונים מעריכיים ..... (ללא ספר)
8. אי שוויונים לוגריתמיים ..... (ללא ספר)
9. תחום הגדרה ..... (ללא ספר)

מתמטיקה לכלכלנים

פרק 3 - הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית ..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות ..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה ..... (ללא ספר)
8. תחום הגדרה של פונקציה 1
9. הרכבת פונקציות 3
10. הפונקציה ההפוכה 6
11. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית 10
12. פונקציה מפוצלת 12
13. תרגילים משולבים 13
14. מבוא לתורת הקבוצות 17

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

1) $y = x^3 - x^2 - 4x + 1$

2) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$

3) $y = \frac{4x+1}{x^2+1}$

4) $y = \frac{1}{x^3 - x}$

5) $y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$

6) $y = \sqrt{x-4}$

7) $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$

8) $y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$

9) $y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

10) $y = \ln\left(x^2 + x - 2\right)$

11) $y = \log x + \frac{1}{\log x}$

12) $y = e^{x^2+x+1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) $y=\log_x(x+4)$

תשובות סופיות

1) כל x.

2) $x\neq\pm2$

3) כל x.

4) $x\neq 0,1,-1$

5) $x\neq 2,-1$

6) $x\geq 4$

7) $x\leq -2\ ,\ x\geq 1$

8) כל x.

9) $-1<x<1$

10) $x<-2\ ,\ x>1$

11) $x>0\ ,\ x\neq 1$

12) כל x.

13) $x>0\ ,\ x\neq 1$

הרכבת פונקציות

שאלות

1) נתונות הפונקציות $f(x)=x-4$, $g(x)=x^2$, $h(x)=\frac{4}{x}$.

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$

ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

2) נתון $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$.

חשבו את $f(f(x))$ עבור $x=3$.

3) נתון $g(x)=\frac{5-x}{x-7}$, $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$.

חשבו את $f(g(x))+g(f(x))$ עבור $x=8$.

4) נתון $g(x)=\ln x$, $f(x)=x^2-7x$.

חשבו את $f(g(x))$ עבור $x=e^2$.

5) נתון $g(x)=\ln x$, $f(x)=e^{2x}$.

חשבו את $f(g(x))$ עבור $x=2$.

6) נתון $g(x)=\begin{cases} x+3 & x>4 \\ 3x & x\le 4 \end{cases}$, $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ x^2 & x\le 0 \end{cases}$.

חשבו את $f(g(x)), g(f(x))$.

7) נתונות הפונקציות

$g(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<1 \\ -x^2-2x-1 & x\ge 1 \end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\le -1 \\ \sqrt{x+1} & x>-1 \end{cases}$.

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x)=g(f(x))$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונות הפונקציות

$g(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<1 \\ -x^2-2x-1 & x\ge 1 \end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\le -1 \\ \sqrt{x+1} & x>-1 \end{cases}$.

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x)=f(g(x))$.

ב. נתון ש- $n\in\mathbb{Z}$ ו- $h(n)\notin\mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

1. $n\le -3$
2. $n\ge 1$
3. n אי-זוגי שלילי.
4. אף תשובה אינה נכונה.

9) נתון $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

מצאו את $f^n(x)=\underbrace{f(f(f(...(f(x))))}_{n\,\text{Times}}$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. -3 ב. 4 ג. x^2-4 ד. $\frac{4}{x-4}$ ה. $x-8$ ו. x

2) 3

3) 69/13

4) -10

5) 4

6) $f(g(x))=\begin{cases}\frac{1}{x+3} & x>4\\ \frac{1}{3x} & 0<x\le 4\\ (3x)^2 & x\le 0\end{cases}$, $g(f(x))=\begin{cases}x^2+3 & x<2\\ 3x^2 & -2\le x\le 0\\ \frac{1}{x}+3 & 0<x<\frac{1}{4}\\ 3\frac{1}{x} & x\ge\frac{1}{4}\end{cases}$

7) $z(x)=\begin{cases}4x^2+16x+12 & x<-1.5\\ -4x^2-20x-25 & -1.5\le x\le -1\\ x-3 & -1<x<0\\ -x-2-2\sqrt{x+1} & x\ge 0\end{cases}$

8) א. $h(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-3} & x<-\sqrt{3}\\ 2x^2-4 & -\sqrt{3}\le x<1\\ -2x^2-4x+2 & x\ge 1\end{cases}$ ב. $n\le -3$

9) $f^n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בשאלות **1-4** הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

1) $f(x)=\frac{x-1}{3}$

2) $f(x)=\frac{x+1}{x}$

3) $f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$

4) $f(x)=x^2-4 \quad (x\geq 0)$

בשאלות **5-7**, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע.
בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

5) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

6) $f(x)=x^2-x$

7) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

בשאלות **8-10**, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע,
אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

8) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

9) $y=\frac{x^2+3}{2x-1}$

10) $f(x)=\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^3$

11) נתונה $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$.
האם הפונקציה היא חח"ע?
מצאו את התמונה של הפונקציה.

12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{x-1}{3}$

ב. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{x+1}{x}$

ג. $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$; $f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$

ד. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$; $f(x)=x^2-4$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה.
בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

ב. $f:\mathbb{R}\to(0,1]$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

ג. $f:(1,\infty)\to(0,1]$ $\quad h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

14) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$.
תהי $h:A\to C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x)=g\left(f(x)\right)$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם f ו- g חח"ע אז h חח"ע.
ב. אם f ו- g חח"ע אז h על.
ג. אם f ו- g על אז h על.
ד. אם f ו- g על אז h חח"ע.
ה. אם f חח"ע ו- g על אז h חח"ע.
ו. אם f חח"ע ו- g על אז h על.
ז. אם f על ו- g חח"ע אז h חח"ע.
ח. אם f על ו- g חח"ע אז h על.

15) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$.
תהי $h:A\to C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x)=g\left(f(x)\right)$.
נתון כי h על.
הוכיחו או הפריכו:

א. f חח"ע.
ב. f על.
ג. g חח"ע.
ד. g על.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ \ g:B\to C$.

תהי $h:A\to C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x)=g\left(f(x)\right)$.

נתון כי h חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

א. g על.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. f חח"ע.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f^{-1}(x)=3x+1$, כל y .

2) $f^{-1}(x)=\frac{1}{x-1}$, $y\neq 1$

3) $f^{-1}(x)=\frac{2x-2}{x-3}$, $y\neq 3$

4) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}$, $y\geq -4$

5) לא חח"ע. תמונה: $y\leq -2$ או $y\geq 2$.

6) לא חח"ע. תמונה: $y\geq -\frac{1}{4}$.

7) לא חח"ע. תמונה $0\leq y\leq 1$.

8) כן חח"ע. תמונה: $y>0$. פונקציה הפוכה: $x>0$ $f^{-1}(x)=1-\frac{1}{x^2}$.

9) לא חח"ע. תמונה: $y\geq 2.3$ או $y\leq -1.3$

10) כן חח"ע. תמונה: $y\neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x)=\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}$.

11) לא חח"ע. תמונה: $y\geq \frac{6}{\sqrt{3}}$.

12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: $\mathbb{R}$; על.

ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; לא על.

ג. תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R}\setminus\{3\}$; על.

ד. תחום הגדרה $[0,\infty)$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $[-4,\infty)$; לא על.

13) א. תחום הגדרה וטווח: $\mathbb{R}$, תמונה: $(0,1]$; לא על.

ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}$, טווח ותמונה: $(0,1]$; על.

ג. תחום הגדרה $(1,\infty]$, טווח $(0,1]$, תמונה: $(0,0.5)$; לא על.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציה זוגית ואי זוגית

שאלות

מצאו איזה מבין הפונקציות בשאלות **1-6** הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

1) $y=4x^3$ **2)** $y=x^4+x^{10}$ **3)** $y=1$

4) $y=\frac{1}{x}$ **5)** $y=2^x$ **6)** $y=\ln x+x^2$

7) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
ונסמן $z(x)=f\left(x^2\right),\ k(x)=-f(x)$.
בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k,z, האם היא זוגית או אי-זוגית.

8) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, פונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
ונסמן $z(x)=-g\left(x^3\right)$ ו- $k(x)=-f\left(x^3\right)$.
טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.
טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.
איזו טענה נכונה?

9) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, פונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
ונסמן $k(x)=f(-x)+x^{11}g(|x|)$, $z(x)=-g(-4x)\cdot f\left(x^4\right)$.
בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות z,k, האם היא זוגית או אי-זוגית.

10) הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

שאלות **1-6** : זוגית : **2,3** ; אי- זוגית : **1,4** ; כללית : **5,6**.

7) k אי-זוגית, z זוגית.

8) טענה ב'.

9) k אי-זוגית, z זוגית.

10) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציה מפוצלת

שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות **1-4** כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

1) $y=|x-2|$

2) $y=3|x+1|$

3) $y=x^2+2|x-1|$

4) $y=\frac{|x|}{x}$

5) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 4 \\ -x & x<0 \end{cases}$.

א. חשבו $f(1),\ f(4),\ f(-4),\ f(0),\ f(7)$.

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

תשובות סופיות

1) $y=\begin{cases} x-2 & x\ge 2 \\ 2-x & x<2 \end{cases}$

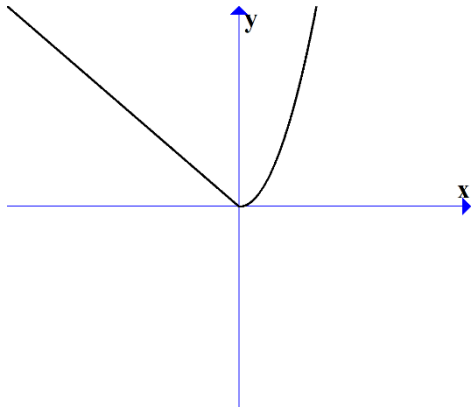
2) $y=\begin{cases} 3x+3 & x\ge -1 \\ -3x-3 & x<-1 \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} x^2+2x-2 & x\ge 1 \\ x^2-2x+2 & x<1 \end{cases}$

4) $y=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

5) א. $f(1)=1,\ f(4)=16,\ f(-4)=4,\ f(0)=0,\ f(7)=\text{undefind}$

ב.



ג. כללית.

תרגילים משולבים

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>1 \\ x^3+1 & -1\le x\le 1 \\ x+1 & x<-1 \end{cases}$.

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על $\mathbb{R}$.

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x} & x>1 \\ x^5+1 & -1\le x\le 1 \\ x+1 & x<-1 \end{cases}$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.
קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על $\mathbb{R}$.

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

3) נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, זוגית ומונוטונית עולה ממש,
ופונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.
נסמן: $z(x)=-g(x^3)$ ו- $k(x)=-f(x^3)$.
טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ג': $h(x)=k(x)z(x)$ זוגית.
מי מבין הטענות נכונה?

4) נתונות שתי פונקציות, $f,g:[0,1]\to[0,1]$.
נתון ש- f מונוטונית עולה ממש, ואילו g מונוטונית יורדת חלש,
אך אינה יורדת ממש.
תהי $h(x)=f(g(x))$.
איזו טענה נכונה?
א. h יורדת חלש.
ב. h עולה ממש.
ג. h עולה חלש, אך אינה עולה ממש.
ד. h אינה חסומה בהכרח.

5) נתונות הפונקציות $g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<0\\ -x^2-2x-1 & x\ge 0\end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases}x+4 & x\le 0\\ \sqrt{x} & x>0\end{cases}$.
תהי $h(x)=f(g(x))$.
א. מצאו את h בקטע $[-2,0)$.
ב. קבעו האם h חח"ע בקטע $[-2,0)$.
ג. קבעו האם h חסומה בקטע $[-2,0)$.
ד. קבעו האם $h:[-2,0)\to[0,4]$ היא על.
* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x)=x^3,\ g(x)=(-1)^{\lfloor x\rfloor}$.
קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.
הפונקציה $h(x)=f(g(x))$ היא:
א. חסומה.
ב. אי-זוגית.
ג. חח"ע.
ד. מונוטונית.

7) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x)=x^3,\ g(x)=-\lfloor x\rfloor$.

א. בדקו את מונוטוניות $z(x)=f(g(x))$.

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x)=g(f(x))$.

ג. בדקו האם $h(x)=\sqrt[3]{f(x)}-g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם $a<b \Leftarrow f(a)\ge f(b)$ אז הפונקציה f יורדת חלש.

8) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$ $\begin{array}{l} f(x)=(3\lfloor x\rfloor)^3+27\lfloor x\rfloor \\ g(x)=f(x)+x^3-28 \end{array}$.

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה g עולה ממש וחח"ע.

9) מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$,

קבעו את תחום הגדרתה והוכיחו שהפונקציה על $\mathbb{R}$.

הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10) חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x)=\frac{2x+3}{3x-1}$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
ז. כן. ח. כן.

2) אף טענה אינה נכונה.

3) טענה ב' נכונה.

4) טענה א' נכונה.

5) א. $h(x)=x^2$ ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.

6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.

7) א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש. ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.

8) שאלת הוכחה.

9) $f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; תחום הגדרתה: כל x.

10) ראו באתר.

11) א. $-1\le x\le 2$ ב. $0\le y\le \frac{3}{2}$ ג. שאלת הוכחה.
ד. $-1\le x<\frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2}<x\le 2$ ירידה.

מבוא לתורת הקבוצות

סיכום כללי

הגדרות יסודיות

- גרירה חד כיוונית $\Rightarrow$. $A \Rightarrow B$ פירושו: אם A מתקיים, אז גם B מתקיים.
- גרירה דו-כיוונית $\Leftrightarrow$ (אם ורק אם). $A \Leftrightarrow B$ פירושו: $A \Rightarrow B$ וגם $B \Rightarrow A$.
- הסימן 'או' $\vee$.
- הסימן 'וגם' $\wedge$.

קבוצה, איבר של קבוצה ושייכות לקבוצה

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שייכות לקבוצה:
  - על מנת לציינו שהאיבר a שייך לקבוצה A נרשום $a \in A$.
  - על מנת לציינו שהאיבר a אינו שייך לקבוצה A נרשום $a \notin A$.

שוויון בין קבוצות

שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק את אותם איברים.

פורמלית שוויון בין קבוצות מוגדר באופן הבא: $A = B \Leftrightarrow \left(x \in A \Leftrightarrow x \in B\right)$.

הקבוצה ריקה

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב- ϕ, כלומר $\phi = \{\ \}$.

קבוצה סופית ואינסופית

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא אינסופית אם מספר האיברים בה אינסופי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

עוצמה של קבוצה

מספר האיברים של קבוצה A נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן $|A|$.

תת-קבוצה

אם קבוצה A מוכלת בקבוצה B, נסמן $A \subseteq B$.

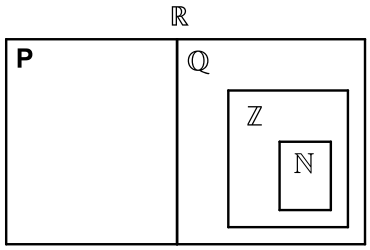
תמיד מתקיים:

- $A \subseteq A$
- $\phi \subseteq A$

עבור שוויון קבוצות נדרוש $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ או $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

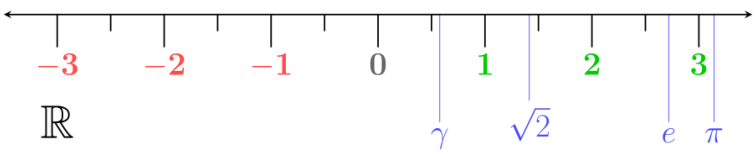
קבוצות מספרים מיוחדות

- קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.
- קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...\}$.
- קבוצת המספרים הרציונאליים: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| \; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$.
- קבוצת המספרים האי-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט **P**).
- קבוצת המספרים הממשיים: $\mathbb{R}$ (כוללת את $\mathbb{Q}$ ואת **P**).



ציר המספרים

את קבוצת כל המספרים הממשיים ניתן לתאר על ידי הישר הממשי שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים הממשיים:



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

קטעים על ציר המספרים

תיאור מילולי	סימון קבוצות	סימון קטעים
הקטע הפתוח מ- a ל- b לא כולל נקודות הקצה	$\{x \mid a < x < b\}$	(a,b)
הקטע הסגור מ- a ל- b וכולל נקודות קצה	$\{x \mid a \le x \le b\}$	$[a,b]$
קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את a ולא את b	$\{x \mid a \le x < b\}$	$[a,b)$
קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את b ולא את a	$\{x \mid a < x \le b\}$	$(a,b]$
הקרן הפתוחה מ- a עד ∞ ללא a	$\{x \mid a < x < \infty\}$	(a,∞)
הקרן הסגורה מ- a עד ∞ כולל a	$\{x \mid a \le x < \infty\}$	$[a,\infty)$
הקרן הפתוחה מ- $-\infty$ עד b ללא b	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	$(-\infty,b)$
הקרו הסגורה מ- $-\infty$ עד b כולל b	$\{x \mid -\infty < x \le b\}$	$(-\infty,b]$

קבוצת החזקה של קבוצה נתונה

קבוצת כל תתי-הקבוצות של A, נקראת קבוצת החזקה של A, ומסומנת $P(A)$.

איחוד וחיתוך קבוצות

- איחוד קבוצות A ו- B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת $A \cup B$.
- חיתוך קבוצות A ו- B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים-המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת $A \cap B$.

תכונות האיחוד	תכונות החיתוך
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$A \cup \phi = A$	$A \cap \phi = \phi$
$A \subseteq A \cup B$	

כתב ופתר – גיא סלומון ©

הדיסטריביוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

הפרש קבוצות

ההפרש של שתי קבוצות A ו-B, המסומן $A-B$, הוא קבוצה שאיבריה הם כל איברי A שאינם איברי B, כלומר $A-B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}$.

משלים של קבוצה

ההפרש $U-A$ מסומן ב- A^c או ב- A' ונקרא **המשלים** של A, כאשר U היא הקבוצה האוניברסלית.

כללי דה-מורגן

- $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$
- $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

דיאגרמת ון

תיאור גרפי של קבוצות והיחסים ביניהן.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y: (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y: (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z: xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ (k ו- n טבעיים).

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי־השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x.

ג. לכל מספר טבעי n, המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x, $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 4\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה: $A = \{x \mid$ מקיים תכונה מסוימת $x\}$.

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 4, 3, 2, 1.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A=\{11,13,17,19\}$

ב. $B=\{x \mid 10<x<20,\ x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C=\{11,11,17,13,19\}$

ד. $D=\{x \mid x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

ה. $E=\{x \mid x=2m,\ m \text{ שלם זוגי}\}$

6) נתונה הקבוצה $A=\{1,2,\{2\},\{2,5\},4,\{2,4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5\in A$	ב. $2\in A$	ג. $\{2\}\in A$
ד. $\{2\}\subseteq A$	ה. $\{\{2\}\}\subseteq A$	ו. $\phi\in A$
ז. $\phi\subseteq A$	ח. $\{2,\{2\}\}\subseteq A$	ט. $\{2,4\}\subseteq A$
י. $\{2,4\}\in A$	יא. $\{\{2,4\}\}\in A$	יב. $\{2,5\}\subseteq A$
יג. $\{2,5\}\in A$	יד. $\{1,4\}\in A$	

7) מצאו שתי קבוצות, A ו-B, המקיימות:

א. $A\in B$

ב. $A\subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$, $E=\{7,8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X:

א. $X\subseteq A$ וגם $X\not\subseteq D$.

ב. $X\subseteq D$ וגם $X\not\subseteq C$.

ג. $X\subseteq E$ וגם $X\not\subseteq A$.

9) הוכיחו: $A\subseteq B \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$.

רשמו את:

א. $A\cup B$ ב. $A\cap B$ ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$ ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

11) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=[1,4)$, $B=(-2,1)$, $C=\{x\in R\,|\,0\le x\le 4\}$, $D=\{x\,|\,2^x=0\}$.

רשמו את:

א. $A\cup B$ ב. $A\cap B$ ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$ ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

12) נתונות 3 קבוצות:

$A=\{4,5,6,7,8\}$, $B=\{5,6,7,8,9\}$, $C=\{4,5,6,10\}$

א. חשבו את $(A-B)-C$.

ב. חשבו את $A-(B-C)$.

13) נתון: $B=\{13,15,17\}$, $A=\{12,15,18\}$, $U=\{11,12,13,14,15,16,17,18\}$.

הדגימו את כלל דה מורגן $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

14) הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

15) מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל-$\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות:

א. $A=[1,\infty)$

ב. $B=(-\infty,1)\cup(4,\infty)$

ג. $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-5x+4>0\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-1|<2\ \vee\ x>4\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) הציגו באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

א. $A\cap B$ ב. $A\cup B$

ג. A^c ד. $A\cap B^c$

ה. $A^c\cap B$ ו. $A\cup B^c$

ז. $A^c\cup B$ ח. $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$

ט. $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$

17) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $A\setminus B=A\cap B^C$.
הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.

ב. נסמן: $X=C\setminus(A\cap B),\ Y=(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$.
הוכיחו כי $X=Y$.

ג. נסמן: $X=A\setminus(B\cup C),\ Y=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.
הוכיחו כי $X=Y$.

18) תהיינה X,Y,Z קבוצות כלשהן.

טענה א': $X\cap Y\cap Z=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus Z)\cup(Z\setminus X)$.

טענה ב': $((X\cap Y)\cup Z)^C=(X^C\cup Y^C)\cap Z^C$.

טענה ג': $X\setminus(Y\setminus Z)=(X\setminus Y)\setminus Z$.

איזו טענה נכונה לכל בחירה של X,Y,Z?

19) נתונה הקבוצה $A=\{\phi,4,\{4\}\}$.

רשמו את $P(A)$.

20) הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. לכל קבוצה A מתקיים $A\subseteq P(A)$.

ב. לכל קבוצה A מתקיים $A\not\subseteq P(A)$.

21) הוכיחו כי: $A\subseteq B\ \Rightarrow\ P(A)\subseteq P(B)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ב. לכל x קיים y, כך ש- $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz=\frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.

ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.

ה. לכל n טבעי המספר n^3-n מתחלק ב-6. הטענה נכונה.

2) א. $x^2>4\Rightarrow x>2\vee x<-2$ ב. $\forall x: x^2+4>0$

ג. $\forall n\exists k: n^3-n=6k$ ד. $\forall x: |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

3) א. $A=(-4,4)$, בקבוצה אינסוף איברים.

ב. $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, בקבוצה 7 איברים.

ג. $C=\{1,2,3\}$, בקבוצה 3 איברים.

ד. $D=\{-3,-2,-1,0\}$, בקבוצה 4 איברים.

ה. $E=\{0,1\}$, בקבוצה 2 איברים.

ו. $F=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, בקבוצה 9 איברים.

4) א. $A=\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}\}$ ב. $B=\{11,13,17,19\}$

ג. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4^2,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ ד. $D=\{1,4,9,16\}$

5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.

6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

7) $B=\{\{1,2\},1,2\}$, $A=\{1,2\}$.

8) א. A, C ב. E, D ג. לא קיימת קבוצה כזאת.

9) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) א. $A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,910\}$ ב. $A\cap B=\{4,6,8\}$

ג. $(A\cup B)\cap C=\{3,5,7,9\}$ ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)=\{4,6,7,8,10\}$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)=\{6,8\}$.

11) א. $A\cup B=(-2,4)$ ב. $A\cap B=\phi$

ג. $(A\cup B)\cap C=(0,4)$ ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)=(-2,1)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)=[0,1)$.

12) א. ϕ ב. $\{4,5,6\}$.

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

15) א. $A^c=(-\infty,1)$ ב. $B^c=[1,4]$ ג. $C^c=[1,4]$

ד. $D^c=(-\infty,1]\cup[3,4]$.

16) ראו סרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענה ב.

19) $P(A)=\{\phi,\{\phi\},\{4\},\{\{4\}\},\{\phi,4\},\{4,\{4\}\},\{\phi,\{4\}\},\{\phi,4,\{4\}\}\}$.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה לכלכלנים

פרק 4 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

1. הסבר כללי ..... (ללא ספר)
2. הצבה 27
3. צמצום 28
4. הכפלה בצמוד 29
5. גבולות טריגונומטריים 30
6. פונקציה שואפת לאינסוף 32
7. איקס שואף לאינסוף 33
8. הגבול של אוילר 35
9. כלל הסנדויץ 36
10. גבול של פונקציה מפוצלת 37
11. גבול לפי הגדרה 40

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 4} x^2+x+1$

ב. $\lim_{x\to 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x\to 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^7-x}{x-1}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2-5x+2}{6x^2-5x+1}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

7) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

8) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

9) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^3-4x^2+x-4}$

10) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[5]{x}+1}{x+1}$

תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{10}{8.5}$ 3) 6 4) $n-1$ 5) -3

6) 32 7) 3 8) 27 9) $\frac{8}{17}$ 10) $\frac{1}{5}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$

8) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+x}-1}{\sqrt[3]{x}}$

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}$

2) 4

3) $-\frac{1}{12}$

4) $\frac{3}{8}$

5) $\frac{1}{6}$

6) $\frac{3}{4}$

7) $\frac{1}{3}$

8) $-\frac{8}{3}$

9) $\frac{1}{2}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבולות טריגונומטריים

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$):

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{4x}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin 2x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

10) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{x^2-1}$

11) $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

12) $\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$

13) $\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}$

14) $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 4x}{\sin 10x}$

15) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

16) $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

17) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2 x}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{2}$ 5) $\frac{1}{2}$

6) $\frac{1}{2}$ 7) $\frac{1}{8}$ 8) 4 9) $\frac{1}{4}$

10) $-\frac{1}{2}$ 11) $\cos a$ 12) $-\sin a$ 13) $\frac{1}{\cos^2 a}$

14) $\frac{4}{10}$ 15) $\frac{1}{2}$ 16) $\frac{2}{\pi}$ 17) 1

זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\begin{cases} \sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ \sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} \\ \cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2} \\ \tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b} \\ \tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b \\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\pi n=0 \\ \cos\pi n=(-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\cos a \\ \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin a \end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+4}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)^2}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^2}{(2-x)^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to 2^-}-\frac{1}{2}\ln(2-x)$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left((\ln x)^2+2\ln x-3\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

12) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\cdot\cot x$

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}}$

תשובות סופיות

1) ϕ
2) ϕ
3) $-\infty$
4) ϕ
5) $-\infty$
6) ∞
7) ∞
8) ϕ
9) 0
10) 1
11) ϕ
12) $-\infty$
13) $-\infty$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

x שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{-x}\right)^{\ln x}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x+e^{x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+2}{x^2+1000x}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+2x^2+6}{3x^3+10x}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+6}{2x+10}-\dfrac{x}{2}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^6-5x}}{x^3-2x^2+1}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+2x^2+6+27x^6}}{\sqrt{3x^3+10x+4x^4}}$

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

13) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{16^x+4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4\cdot 9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

15) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4\cdot 9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{4x^2+2}{x^2+1000x}}$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{3x^3-5x-1}{x^3-2x^2+1}\right)$

18) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{x^4+2x^2+6}{3x^4+10x}}$

19) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin\left(\dfrac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}\right)$

20) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[5]{\dfrac{ax+1}{bx+2}}$

21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$

22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+kx}-x\right)$

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

24) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

25) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x^2\right)$

26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-4)^{10}(3x^2-1)^4}{x^2(2x-5)^{10}(x^3+1)^2}$

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^5}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}$

29) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(5\cdot 2^{x+2}+6\cdot e^{x+1}\right)-x\right]$

תשובות סופיות

1) 0 2) $-\frac{\pi}{2}$ 3) 4 4) $-\infty$

5) 0 6) -5 7) 1 8) -1

9) -3 10) 1.5 11) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ 12) $\frac{1}{4}$

13) 0 14) 4 15) $\frac{1}{9}$ 16) 2

17) $\ln 3$ 18) $e^{\frac{1}{3}}$ 19) 0

20) אם $b\neq 0$: $\lim=\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$. אם $a>0$, $b=0$: ∞. אם $a<0$, $b=0$: $-\infty$.

21) 2.5 22) $\frac{k}{2}$ 23) $\frac{1}{2}$ 24) $-\frac{1}{2}$

25) $\frac{1}{2}$ 26) $\frac{a-b}{2}$ 27) $\frac{3^4}{2^{10}}$ 28) $\frac{5}{4}$

29) $\ln(6e)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$):

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x$

4) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1}$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x$

6) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2}$

8) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x}$

9) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{x}\right)^x$

תשובות סופיות

1) $e^{\frac{1}{2}}$ 2) 1 3) e^2 4) e^{-1} 5) e^3

6) e 7) e^{-12} 8) e^{30} 9) e

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

כלל הסנדוויץ'

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-10**:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos(2x+1)}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{4x+\cos x}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+\sin 2x}{x^2+\cos 3x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\cos\left(\ln x^2\right)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\arctan(2x-3)}{4x+\arctan(x-\ln x)}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{2^x+3^x+4^x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}[x]$

10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}[x]$

11) נתונה פונקציה $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיימת $\lim\limits_{x\to 2}z(x)=4$,

ונתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיימת $4z(x)\le f(x)\le\left(z(x)\right)^2$, לכל x.

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(z(x))}{x}\ ,\ \lim_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)\ ,\ \lim_{x\to 2}\tan(z(x))\ ,\ \lim_{x\to 2}f(x)$$

12) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

תשובות סופיות

1) 0 **2)** 0 **3)** $\frac{3}{4}$ **4)** 3 **5)** 0

6) 0 **7)** $\frac{3}{4}$ **8)** 4 **9)** 1 **10)** 0

11) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=16$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos(z(x))}{x}=0$,

$\lim\limits_{x\to 2}\tan(z(x))=\tan 4$, $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)=2$

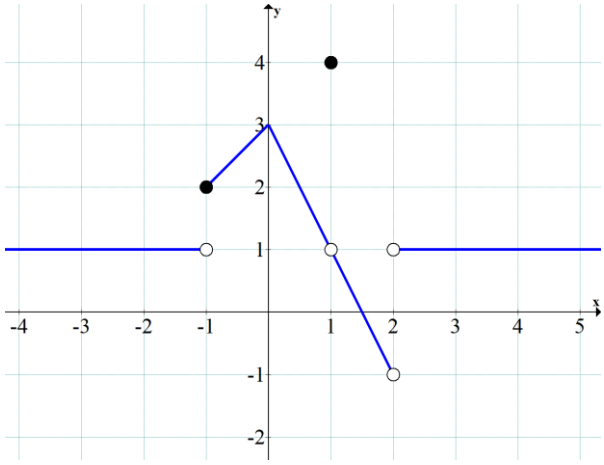
12) 0

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבול של פונקציה מפוצלת

שאלות

1) להלן גרף של פונקציה:



חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

א. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ 3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 1.

ב. $\lim\limits_{x\to -1}\left(3f-f^2\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(3f-f^2\right)$ 1.

ג. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-f}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{4-f}$ 1.

2) נגדיר פונקציה $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0.5 & x=0\\ x^2-1 & 0<x<2\\ 1.5x-6 & x\ge 2\end{cases}$.

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim\limits_{x\to 2}\left[4\left(f(x)\right)^2+10f(x)\right]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

3) נגדיר פונקציה $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0.5 & x=0\\ \cos x & 0<x<\pi\\ -0.5 & x\ge\pi\end{cases}$.

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim\limits_{x\to\pi}\left[2\left(f(x)\right)^2+3f(x)\right]$.

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ של הפונקציות הבאות:

4) $(a=0),\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 4x}{x} & x>0\\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x<0\end{cases}$

5) $(a=1)\ ,\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x>1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x<1\end{cases}$

6) $(a=0)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

7) $(a=\infty)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

8) $(a=-\infty)\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

9) א. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

ב. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $1.\lim_{x\to1} f(x)=1$, $2.\ \lim_{x\to2} f(x)=\nexists$, $3.\ \lim_{x\to-1} f(x)=\nexists$

ב. $1.\ \lim_{x\to1}\left(3f-f^2\right)=2$, $2.\ \lim_{x\to-1}\left(3f-f^2\right)=2$

ג. $1.\ \lim_{x\to1}\frac{1}{4-f(x)}=\frac{1}{3}$, $2.\ \lim_{x\to1}\frac{1}{1-f(x)}=\nexists$

2) א. ראו בסרטון. ב. $\lim_{x\to0} f(x)=1,\ \lim_{x\to2} f(x)=-3$ ג. 6

3) א. ראו בסרטון. ב. $\lim_{x\to0} f(x)=1,\ \nexists\lim_{x\to\pi} f(x)$ ג. -1

4) 4

5) ϕ

6) ϕ

7) 1

8) -1

9) א. אין גבול. ב. $\frac{1}{6}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבול לפי הגדרה

שאלות

בשאלות **1-6**, **על פי הגדרת הגבול**, הוכיחו:

1) $\lim_{x\to 2} 7x+14=28$

2) $\lim_{x\to 4} x^2+x=20$

3) $\lim_{x\to 24} \sqrt{x+1}=5$

4) $\lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$

5) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x}{x^2-2}=1$

6) $\lim_{x\to \alpha} \sin x=\sin\alpha$

7) חשבו, **על פי הגדרת הגבול**: $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$.

הוכיחו **על פי הגדרת הגבול** את מקרים **8-11**:

8) $\lim_{x\to 2} \frac{3+x}{x^2+1}=1$

9) $\lim_{x\to \infty} \frac{x+7}{x+2}=1$

10) $\lim_{x\to \infty} \frac{3-4x}{2x+1}=-2$

11) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1}=3$

12) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to \infty} f(x)=-5$.
הוכיחו כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x>M$ מתקיים $f(x)<-4$.

13) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to \infty} f(x)=5$.
הוכיחו כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x>M$ מתקיים $f^2(x)>16$.

14) נניח f פונקציה ממשית וחיובית בתחום $[a,\infty)$ המקיימת $\lim_{x\to \infty} f(x)=0$.
הוכיחו שמתקיים $\lim_{x\to \infty} \sqrt{f(x)}=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) נתון הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+3x+2}=1$.

מצאו ערך של $M>0$, עבורו לכל $x>M$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצאו M, כך ש-$\forall x>M:\ |f(x)-L|<0.1$).

16) נגדיר את הפונקציה $f(x)=\begin{cases}2 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}\end{cases}$.

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

א. $\lim_{x\to\infty}f(x)$ ב. $\lim_{x\to 2.5}f(x)$ ג. $\lim_{x\to\pi}f(x)$

17) בהינתן הגבול $\lim_{x\to 1}\frac{2x+4}{x+11}=\frac{1}{2}$, מצאו $\delta>0$, כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים $|x-1|<\delta$, אי-השוויון $\left|\frac{2x+4}{x+11}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{100}$ מתקיים.

18) הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$, אז $\lim_{x\to\infty}(f^2(x)-g^2(x))=0$.

ב. אם $\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=0$, אז $\lim_{x\to x_0}(f^2(x)-g^2(x))=0$.

ג. אם $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=L$, אז: הגבול $\lim_{x\to x_0}f(x)$ קיים ושווה ל-L או $-L$.

ד. אם הגבולות $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ ו-$\lim_{x\to x_0}f(x)$ קיימים, אז גם הגבול $\lim_{x\to x_0}g(x)$ קיים.

19) יש להוכיח כי $\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+3}\neq 1$ לפי ההגדרה.

20) יש להוכיח כי $\lim_{x\to 4}\frac{2x+1}{x+10}\neq 1$ לפי ההגדרה.

21) הוכיחו שאם $\lim_{x\to 0}f(x)=3$, אז קיימת סביבה נקובה של 0 שבה $f(x)>2$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

22) הוכיחו שאם $\lim_{x\to x_0} f(x) > L$, אז קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה $f(x) > L$.

תשובות סופיות

7) $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר : GOOL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה לכלכלנים

פרק 5 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה ..... (ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה 43
3. תרגילים נוספים לפי סוגים 46
4. גזירה סתומה 49
5. כלל השרשרת 51
6. גזירה לוגריתמית 54
7. נגזרת הפונקציה ההפוכה 55

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות **22-24** מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

1) $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

2) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

3) $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

4) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

5) $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

6) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

7) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

8) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

9) $f(x)=x\cdot\ln x$

10) $f(x)=x^2\cdot\ln x$

11) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

12) $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

13) $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

14) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

15) $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

16) $f(x)=x\cdot e^{-2x^2}$

17) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

18) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

19) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$

20) $y=\sqrt[x]{x}$

21) $y=x^{\sqrt{x}}$

22) $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

23) $y=\left(x^2+1\right)^x$

24) $y=\left(x+1\right)^{(x+1)}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

תשובות סופיות

1) $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2},\quad f''(x)=\frac{4}{x^3}$

2) $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2},\quad f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$

3) $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$

4) $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2},\quad f''(x)=\frac{4x\cdot(2x^2+24)}{(x^2-4)^3}$

5) $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$

6) $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4},\quad f''(x)=12\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$

7) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\quad f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

8) $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x^{1.5}},\quad f''(x)=\frac{3\ln x-8}{4x^{2.5}}$

9) $f'(x)=\ln x+1,\quad f''(x)=\frac{1}{x}$

10) $f'(x)=x(2\ln x+1),\quad f''(x)=2\ln x+3$

11) $f'(x)=\frac{1}{2(2-x)},\quad f''(x)=\frac{1}{(4-2x)^2}$

12) $f'(x)=\frac{2}{x}(\ln x+1),\quad f''(x)=\frac{-2\ln x}{x^2}$

13) $f'(x)=\frac{2}{x}\left[\frac{(\ln x)^4-1}{(\ln x)^3}\right],\quad f''(x)=-\frac{2}{x^2}\left\{\frac{(\ln x)^5-(\ln x)^4-(\ln x)-3}{(\ln x)^4}\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

14) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)$

15) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right)$

16) $f'(x)=e^{-2x^2}(1-4x^2),\quad f''(x)=-4xe^{-2x^2}(3-4x^2)$

17) $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^4}}$

18) $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}},\quad f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}}$

19) $f'(x)=\frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$

20) $y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

21) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2}+1\right)$

22) $y'=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sqrt{x}\right)$

23) $y'=\left(x^2+1\right)^x\left(1\cdot\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\cdot x\right)$

24) $y'=(x+1)^{(x+1)}\left[\ln(x+1)+1\right]$

כתב ופתר – גיא סולומון ©

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$ ב. $f(x)=x^7$ ג. $f(x)=x^2$

ד. $f(x)=x^1$ ה. $f(x)=x^{-3}$ ו. $f(x)=x^{-1}$

ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ ח. $f(x)=x\frac{1}{3}$ ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$ ב. $f(x)=3x^7$ ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$

ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$ ה. $f(x)=8x^1$ ו. $f(x)=3x^{-2}$

ז. $f(x)=\frac{4}{x}$ ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$ ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

הנגזרת של קבוע

3) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$ ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

הנגזרת של סכום והפרש

4) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$ ב. $f(x)=(x^3+6)^5$ ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$ ב. $f(x)=\frac{2}{x}$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$ ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

הנגזרת של מכפלה

7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$

ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$

הנגזרת של מנה

8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x}$ ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

הנגזרת של שורש

9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$ ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$

כתב ופתר – גיא סולומון ©

תשובות סופיות

1)

א. $f'(x)=3x^2$ ב. $f'(x)=7x^6$ ג. $f'(x)=2x$

ד. $f'(x)=1$ ה. $f'(x)=3x^{-4}$ ו. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

ז. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $f'(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

2)

א. $f'(x)=6x^2$ ב. $f'(x)=21x^6$ ג. $f'(x)=2x^3$

ד. $f'(x)=\frac{6x^5}{7}$ ה. $f'(x)=8$ ו. $f'(x)=-\frac{6}{x^3}$

ז. $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$ ח. $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $f'(x)=\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$

3) א. 0 ב. 0

4) א. $f'(x)=3x^2+4x-3$ ב. $f'(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$

5) א. $f'(x)=15(5x-x)^2$ ב. $f'(x)=15x^2(x^3+6)^4$

ג. $f'(x)=6(x-x^2)(1-2x)$ ד. $f'(x)=-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $f'(x)=\frac{8(x+1)^3}{3}$

6) א. $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{x^2}$ ג. $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$ ד. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

ה. $f'(x)=-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$ ו. $f'(x)=\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $f'(x)=-\frac{6}{(x+3)^2}$

7) א. $f'(x)=10x-14$ ב. $f'(x)=(5x+1)^2(20x-44)$

ג. $f'(x)=x^2(6-x)^3(18-7x)$

8) א. $f'(x)=\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $f'(x)=\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$

ד. $f'(x)=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$ ה. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ו. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

9) א. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$

ד. $f'(x)=\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $f'(x)=\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ו. $f'(x)=\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

גזירה סתומה

שאלות

1) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2+y^5-1=1$.

2) גזרו את הפונקציה הסתומה $4\ln x+10\ln y=y^2$.

3) גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}$.

4) מצאו את משואת המשיק למעגל $x^2+y^2=25$, בנקודה $(3,4)$.

5) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2+y-x=xy$, דרך הנקודה $(1,1)$.

6) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$x^2y+e^{y^2-4x}=\ln x+1$,
דרך הנקודה $(1,2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.

7) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy+y}+x^2y=xy^2$,
דרך הנקודה $(1,2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.

8) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{xy^2}+y=y^2-1$,
דרך הנקודה $(0,2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.

9) נתונה הפונקציה הסתומה $x+y\cdot e^y=xy^2+x^2$.

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y=0$.

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

10) גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y-xy=10$.

11) גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y-y^x=1$.

12) נתונה פונקציה סתומה $xy-y^3+x^2-x=0$.
מצאו את ערך y^n בנקודה בה $y=1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

13) נתון כי המשוואה $h(y)-x+1=2x^3+4e^y+2y$,
מגדירה את $y=y(x)$ כפונקציה סתומה של x.
נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.
הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

תשובות סופיות

1) $y'=\frac{-2x}{5y^4-1}$ $\quad 5y^4-1\neq 0,$

2) $y'=\frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y}-2y}$ $\quad \frac{10}{y}-2y\neq 0,$

3) $y'=\frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}}$ $\quad \sqrt{x}\neq 0,\quad \sqrt{x}\neq 1,$

4) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$

5) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

6) $y=\frac{1}{5}x+1\frac{4}{5}$

7) $y=\frac{1}{5}x+1\frac{4}{5}$

8) $y=\frac{4}{3}x+2$

9) א. $(0,0),\ (1,0)$

ב. בראשית הצירים: $y=-x$, המשוואה השנייה: $y=x-1$.

10) $y'=\frac{y-x^y\cdot\frac{y}{x}}{x^y\cdot\ln x-x}$ $\quad x^y\cdot\ln x-x\neq 0,$

11) $y'=\frac{-x^y\cdot\frac{y}{x}+y^x\cdot\ln y}{x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}}$ $\quad x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}\neq 0,$

12) -1

13) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

כלל השרשרת

שאלות

1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4)=10$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f(x^2)$.
חשבו את $g'(2)$.

2) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(2)=4$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

א. חשבו את $g'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכיחו כי g יורדת.

3) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1)=e$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=x^2+f(\ln x)$.

א. חשבו את $g'(e)$.

ב. הוכיחו שהפונקציה g עולה בנקודה $x=e$.

ג. חשבו את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(e+h)-g(e)}{h}$.

4) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1)=e,\quad f(1)=-2$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f^2(\ln x)$.

א. חשבו את $g'(e)$.

ב. האם g עולה או יורדת, בנקודה $x=e$?

ג. נתון כי f שלילית ועולה. מה ניתן לומר על g ?

כתב ופתר – גיא סולומון ©

5) נתונה פונקציה, $f(x)$, יורדת וחיובית.

נגדיר פונקציה חדשה $g(x)=\sqrt{f(x^2+4)}$.

מי מהבאים נכון?

א. g עולה לכל x .

ב. g יורדת לכל x .

ג. g עולה לכל $x>0$.

ד. g יורדת לכל $x>0$.

6) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^2(\sqrt{x})-1}{f(\sqrt{x})}$.

ידוע כי $f(10)=f'(10)=4$. חשבו $g'(100)$.

7) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)+4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$.

ידוע כי $f'(1)=4$, $f(1)=1$.

חשבו $g'(1)$.

8) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^2(\ln x)}{f(\ln x)+1}$.

ידוע כי $f'(0)=1$, $f(0)=2$.

חשבו $g'(1)$.

9) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^{10}(4x)+1}{f\left(\frac{4}{x}\right)+1}$.

ידוע כי $f'(4)=2$, $f(4)=1$.

חשבו $g'(1)$.

10) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$.

ידוע כי $f'(1)=4$, $f(1)=1$.

חשבו $g'(1)$.

תשובות סופיות

1) 40

1) א. 16- ב. שאלת הוכחה.

2) א. $2e+1$ ב. שאלת הוכחה. ג. $2e+1$

3) א. 4- ב. יורדת. ג. $g'(x)<0$

4) ד

5) $\frac{17}{80}$

6) 36

7) $\frac{8}{9}$

8) 44

9) 2-

כתב ופתר – גיא סולומון ©

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות:

1) $y=\sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}}\cdot\sqrt[10]{(2x+1)^7}$

1) $y=\left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x}$

2) $y=\frac{(x+2)^{3x+4}\cdot(5x+6)}{(7x+8)\cdot(9x+10)}$

תשובות סופיות

1) $y'=y\left[\frac{1}{4}\frac{1}{10x-1}\cdot 10+\frac{7}{10}\frac{1}{2x+1}\cdot 2-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\right]$

2) $y'=\left((10x+1)^{\frac{1}{4}}\right)^{2^x}\cdot\frac{1}{4}\left[2^x\cdot\ln 2\cdot\ln(10x+1)+\frac{1}{10x+1}\cdot 10\cdot 2^x\right]$

3) $y'=y\left[3\cdot\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}(3x+4)+\frac{1}{5x+6}\cdot 5-\frac{1}{7x+8}\cdot 7-\frac{1}{9x+10}\cdot 9\right]$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

נגזרת הפונקציה ההפוכה

שאלה

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחה הבאה:

1) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

לתשובה מלאה בסרטון וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סולומון ©

מתמטיקה לכלכלנים

פרק 6 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

תוכן העניינים

1. המשיק 56
2. בעיות משיקים 58
3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק 60
4. הנורמל 64
5. זווית שבין שתי עקומות 65
6. נוסחת הקירוב הלינארי - דיפרנציאל שלם 66

המשיק

שאלות

1) מצאו את שיפוע הפונקציה

א. $f(x)=2x^3-7x$, בנקודה $(2,2)$.

ב. $f(x)=\frac{1}{x^2-3}$, בנקודה $x=-2$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$, כאשר $a>0$.

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{1}{2}$, הוא בעל שיפוע 1.

מצאו את הקבוע a.

3) הישר $2y-3x=3$ משיק לגרף הפונקציה $h(x)=3\sqrt{x}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

4) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=a\cdot 3^{2x-1}+3^{x-b}$, בנקודה $(1,15)$, הוא $21\ln 3$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b.

5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{\ln^2 x+a}{\ln x+b}$, בנקודה $\left(\frac{1}{e},-1\right)$, הוא $\frac{e}{3}$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b.

6) לאילו ערכי k ישיק הישר $y=-5x+6$, לגרף הפונקציה

$f(x)=x^3-2x^2-4x+k$?

לכל ערך k כזה מצאו את נקודת ההשקה.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-4x+5$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות $x=3$ ו- $x=1$.

ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א',
עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2+1}{x-2}$.
מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של $45°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

9) נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+5$.
מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של $135°$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

10) פונקציה $f(x)$ גזירה ברציפות ב- 0 ומקיימת $f(0)=0$.
ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x היא $30°$.
חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

11) מצאו את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x, בנקודות $x=1$ ו- $x=0$.

תשובות סופיות

1) א. 17 ב. 4

2) $a=2$

3) $(1,3)$

4) $a=2,\ b=-1$

5) $a=2,\ b=-2$

6) לערך $k=6$, בנקודה $x=1$; לערך $k=\frac{158}{27}$, בנקודה $x=\frac{1}{3}$.

7) א. ראו באתר. ב. $\alpha=63.43°,\ \beta=116.56°$

8) $x=5,\ x=-1$

9) $x=1,\ x=\frac{1}{3}$

10) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

11) $\alpha=33.69°,\ \beta=90°$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות משיקים

שאלות

1) הישר $y=4x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}+3$.
מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

2) הישר $y=3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+b$.
מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

3) הישר $y=ax+\frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)=\frac{2}{x+c}$ בנקודה $x=0$.
מצאו את a ו- c.

4) הישר $y=x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^x$.
מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

5) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\ln x$ בנקודה $x=e$.

בשאלות **6-7** מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

6) $y=x^2-2x+1$, $(2,-3)$

7) $y=\sqrt{x}$, $(-3,1)$

8) מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות $y=x^2$ ו- $y=-\frac{1}{4}x^2-5$.

9) הפונקציות $y=\frac{1}{x}$ ו- $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ משיקות זו לזו.
מצאו את k ואת נקודת ההשקה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתון כי f גזירה לכל x.

א. הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=x^2 f(3x-2)$ גזירה לכל x.

ב. הישר $2y=10x+11$ משיק לגרף הפונקציה $z(x)$ בנקודה $x=-1$.

מצאו את השיפוע של $f(x)$ בנקודה $x=-5$.

תשובות סופיות

1) נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y=4x+9$.

2) נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b=4$.

3) נקודת ההשקה היא $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ומשוואת המשיק היא $y=-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}$.

4) נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y=x+1$.

5) משוואת המשיק היא $y=\frac{1}{e}x$.

6) $(0,1)$, $y=-2x+1$; $(4,9)$, $y=6x-15$

7) המשיק $(9,3)$, $y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$.

8) $y=-2x-1$, $y=2x-1$

9) $k=1.5$, נקודת ההשקה $(1,1)$.

10) א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

שאלות

1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=2(4x+3)^3$, בנקודה $x=-1$.

2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$, ששיפועו 2 .

3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^3+1$, בנקודה $x=0$.

4) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2-2}$, בנקודה $x_1=1$.

5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{2}{ax+3}$, בנקודה $y=2$, הוא -4 .
מצאו את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

6) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{3x^3}$, היוצרים זווית של $135°$
עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

7) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$, ששיפועו -2 .

8) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$,
בנקודה $x_1=2$.

9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{a}{\sqrt{bx-1}}$, בנקודה $(1,6)$, הוא -6 .
מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b , ואת משוואת המשיק.

10) נתונה הפונקציה $y=e^{2x}+3ex$, והעבירו לה משיק בנקודה $x=2$.
מצאו את משוואת המשיק.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^{2x}+xe^{-x}$, בנקודה $x=0$.

12) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=(e+1)e^{x}-e^{2x}$,
בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=e$.

13) לפונקציה $g(x)=\frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x=e^2$.
מצאו את משוואת המשיק.

14) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y=x\cdot\ln(x^2+1)$, בנקודה $x=1$
.

15) הגרפים של $f(x)=\ln x$ ו- $g(x)=1$ נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון.
בנקודה A העבירו משיק.
מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

16) מצאו את משואת המשיק למעגל $x^2+y^2=25$, בנקודה $(3,4)$.

17) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$xy^2+y-x=xy$, דרך הנקודה $(1,1)$.

18) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$x^2y+e^{y^2-4x}=\ln x+1$,
דרך הנקודה $(1,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

19) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$\sqrt{xy+y}+x^2y=xy^2$,
דרך הנקודה $(1,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

20) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$e^{xy^2}+y=y^2-1$,
דרך הנקודה $(0,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) נתונה הפונקציה הסתומה $x+y\cdot e^{y}=xy^{2}+x^{2}$.

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y=0$.

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y=24x+22$

2) $y=2x-3$

3) $y=1$

4) $y=-12x+9$

5) $a=2,\quad y=-4x-2$

6) $y=-x+1\frac{1}{3},\quad y=-x-1\frac{1}{3}$

7) $y=-2x+8$

8) $y=\frac{11}{16}x-\frac{30}{16}$

9) $a=6,\ b=2,\quad y=-6x+12$

10) $y=\left(2e^4+3e\right)x-3e^4$

11) $y=3x+1$

12) $y=\left(-e^2+e\right)x+e^2,\quad y=\left(e-1\right)x+e$

13) $y=-\frac{2}{e^4}x+\frac{6}{e^2}$

14) $y=\left(\ln 2+1\right)x-1$

15) $y=\frac{1}{e}x$

16) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$

17) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

18) $y=\frac{1}{5}x+1\frac{4}{5}$

19) $y=\frac{1}{5}x+1\frac{5}{6}$

20) $y=\frac{4}{3}x+2$

21) א. $(1,0)$, $(0,0)$ ב. בראשית הצירים: $y=-x$, המשוואה השנייה: $y=x-1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הנורמל

שאלות

1) מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{2x-2}$, בנקודה $(3,2)$.

2) מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה $f(x)=x^4$, המאונך לישר העובר דרך הנקודות $(5,0)$ ו-$(2,4)$.

3) משוואת נורמל לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+1$, בנקודה מסוימת, היא $4y+x=6$.
מצאו את הנקודה.

תשובות סופיות

1) $y=-2x+8$

2) $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

3) $(2,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית שבין שתי עקומות

שאלות

1) מצאו את הזווית בין הפונקציות $y=f(x)=x^2$ ו- $y=g(x)=\frac{1}{x}$.

2) מצאו את הזווית בין המעגל $x^2+y^2=8$ והפרבולה $y^2=2x$.

3) הוכיחו שהאליפסה $x^2+2y^2=8$ וההיפרבולה $x^2-y^2=2$ נחתכות בזווית ישרה.

תשובות סופיות

1) $71.57°$

2) $71.56°$

3) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

שאלות

1) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
$\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$

2) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
$\ln 2, \sqrt[3]{9}$

תשובות סופיות

1) $\sqrt{5} \cong 2.25, \sqrt{8} \cong 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5}$

2) $\ln 2 \cong 1, \sqrt[3]{9} \cong 2\frac{1}{12}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה לכלכלנים

פרק 7 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף 67
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף 69
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף 70
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף 71
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל 72

גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\frac{0}{0}$ **ו-** $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות בשאלות **1-3** (ביטויים רציונאליים):

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$ **2)** $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$ **3)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

חשבו את הגבולות בשאלות **4-8** (ביטויים אי-רציונאליים):

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$ **5)** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$ **6)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1}$ **8)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

חשבו את הגבולות בשאלות **9-12** (פונקציות חזקה):

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ **10)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\ (a,b>0)$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$ **12)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}$

חשבו את הגבולות בשאלות **13-15** (פונקציות לוגריתמיות):

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x^2-2x+1}$ **14)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}$ **15)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)+x}{x}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x+3}$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x+x+1}{e^x}$

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2+2\ln x-3}{x}$

20) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{20}{17}$ 3) $n-1$ 4) 4 5) $\frac{1}{6}$

6) $\frac{3}{2}$ 7) $\frac{5}{6}$ 8) $-\frac{3}{2}$ 9) 1 10) $\ln\frac{a}{b}$

11) $\frac{1}{2}$ 12) $\frac{1}{6}$ 13) $-\frac{1}{2}$ 14) 2 15) 1

16) $\frac{1}{2}$ 17) $\frac{1}{2}$ 18) ∞ 19) 0 20) 0

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה $\infty \cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot e^{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot \ln x$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{2}e^{-x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} x\cdot \ln x$

5) $\lim\limits_{x\to 3^{+}} \left(x^{2}-9\right)\cdot \ln\left(x-3\right)$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot \ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot \left[\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1\right]$

תשובות סופיות

1) ∞ 2) 0 3) 0 4) 0

5) 0 6) 6 7) $\frac{5}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\infty-\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{2}$

3) $-\frac{1}{2}$

4) $\frac{1}{3}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה: ∞^0, $0^{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} (ax)^x \ , \ (a>0)$

3) $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x-4)^{x-2}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

תשובות סופיות

1) e
2) 1
3) 1
4) 1

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

שאלות

הגבולות הבאים הם מהצורה $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים, ולבסוף, חשבו את הגבול.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{4}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה לכלכלנים

פרק 8 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

1. מושגי יסוד 73
2. חקירת פולינום 74
3. חקירת פונקציה רציונלית 75
4. חקירת פונקציה מעריכית 79
5. חקירת פונקציה לוגריתמית 82
6. חקירת פונקציה עם שורשים 86
7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט 87
8. חקירת פונקציה טריגונומטרית 90
9. חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות 94

הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
   - תחום הגדרה ורציפות.
   - נקודות חיתוך עם הצירים.
   - זוגיות ואי-זוגיות.
   - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
   - תחומי עלייה וירידה.
   - נקודות קיצון.
   - תחומי קמירות וקעירות.
   - נקודות פיתול.
   - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד מכאן.

בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פולינום

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=x(x-9)^2$

2) $f(x)=x^4-2x^3$

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה: כל x. נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0 ו-9.

נקודות קיצון: מינימום: $(9,0)$, מקסימום: $(3,108)$.

תחום עלייה: $x<3$ or $x>9$, ירידה: $3<x<9$.

תחום קמירות: $x>6$, קעירות: $x<6$.

נקודת פיתול: $(6,54)$.

2) תחום הגדרה: כל x. נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0 ו-2.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(1.5,\frac{-27}{16}\right)$.

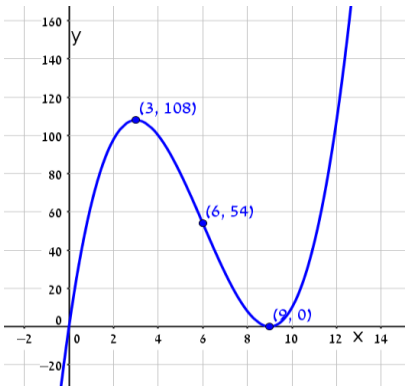
תחום עלייה: $x>1.5$, ירידה: $x<1.5$.

תחום קמירות: $x<0$ or $x>1$, קעירות: $0<x<1$.

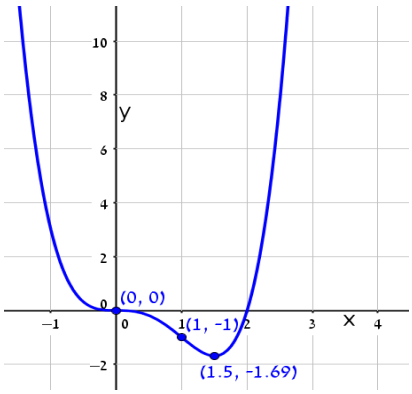
נקודות פיתול: $(0,0)$, $(1,-1)$.

גרפים

1)



2)



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה רציונלית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

2) $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

3) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

4) $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

5) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

6) $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

7) $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

8) $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת $y=x-1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2,0.25)$. נקודת פיתול: $\left(3,\frac{2}{9}\right)$.
תחום עליה: $0<x<2$, ירידה: $x<0 \ \ or \ \ x>2$.
תחום קמירות: $x>3$, קעירות: $x<0 \ \ or \ \ 0<x<3$.

2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,0)$. נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$.
תחום עליה: $x<-1 \ \ or \ \ x>0$, ירידה: $-1<x<0$.
תחום קמירות: $-1<x<\frac{1}{2} \ \ or \ \ x<-1$, קעירות: $x>\frac{1}{2}$.

3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=-2,\ x=2$, משופעת: הישר $y=x$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(-\sqrt{12},-\sqrt{27}\right)$, מקסימום: $\left(\sqrt{12},\sqrt{27}\right)$.
תחום עליה: $x>\sqrt{12} \ \ or \ \ x<-\sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12}<x\neq\pm 2<\sqrt{12}$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $-2<x<0 \ \ or \ \ x>2$, קעירות: $0<x<2 \ \ or \ \ x<-2$.

4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-3,-\frac{27}{4}\right)$.
תחום עליה: $x>-1 \ \ or \ \ x<-3$, ירידה: $-3<x<-1$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $-1<x<0 \ \ or \ \ x<-1$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: -1, עם ציר ה- x: -1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
נקודות פיתול: $(-1,0)$, $\left(-3,\frac{1}{8}\right)$.
תחום קמירות: $-3<x<-1$ & $x>1$, קעירות: $-1<x<1$ or $x<-3$.

6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2,\ x \neq 5$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: $y=-\frac{1}{10}$, עם ציר ה- x: ± 1.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2,\ x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78,-3.88)$, מינימום: $(0.36,-0.11)$.
תחום עלייה: $0.36<x<2$ or $2<x<2.78$,
ירידה: $x>5$ or $2.78<x<5$ or $x<0.36$. נקודת פיתול: $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<2$ or $x>5$, קעירות: $2<x<5$ or $x<-1$.

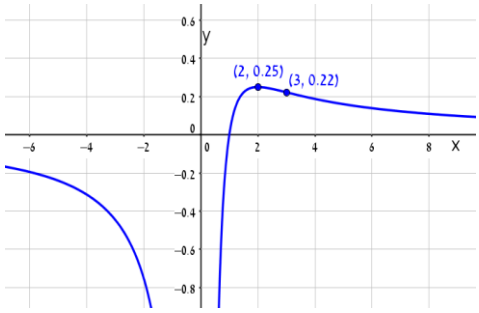
7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: $y=-\frac{3}{4}$, עם ציר ה- x: $x=1,\ x=3$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2,\ x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(0.85,-0.09)$.
תחום קמירות: $0.85<x<2$ or $x<-2$, קעירות: $-2<x<0.85$ or $x>2$.

8) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1,\ x \neq -1$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-2,-4)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $x<-2$ or $0<x<1$ or $x>1$, ירידה: $-2<x<-1$ or $-1<x<0$.
נקודת פיתול: אין.
תחום קמירות: $-1<x<1$ or $x>1$, קעירות: $x<-1$.

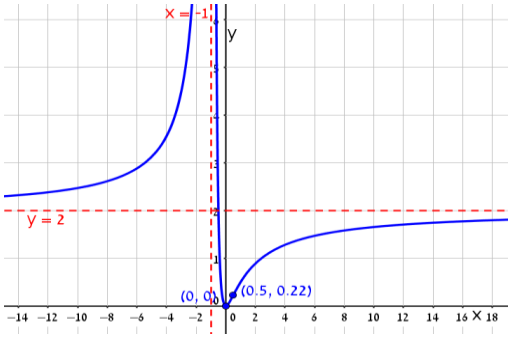
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרפים

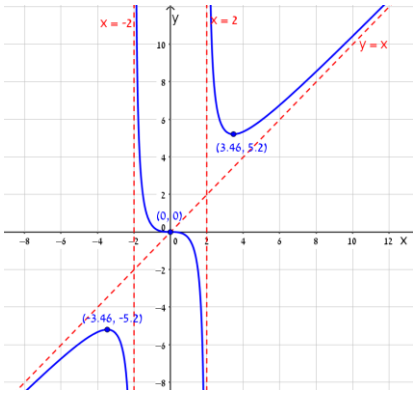
1)



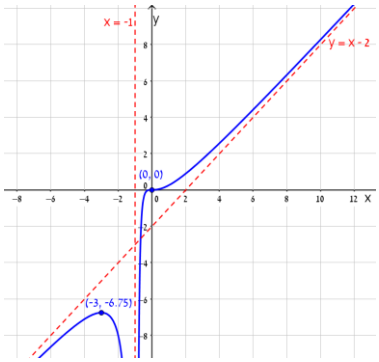
2)



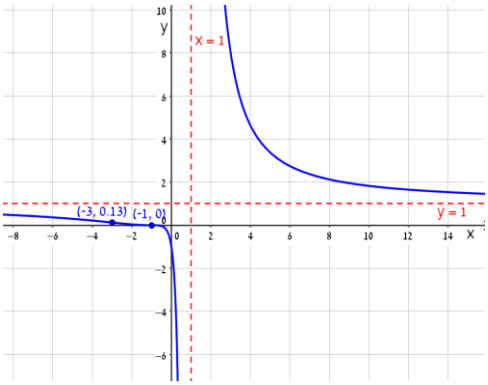
3)



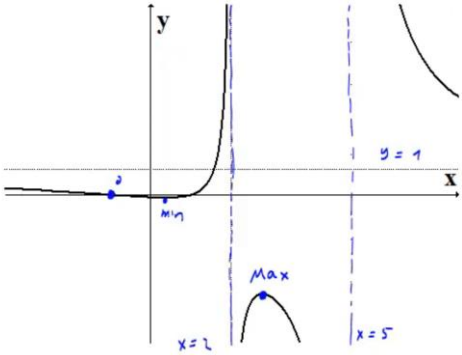
4)



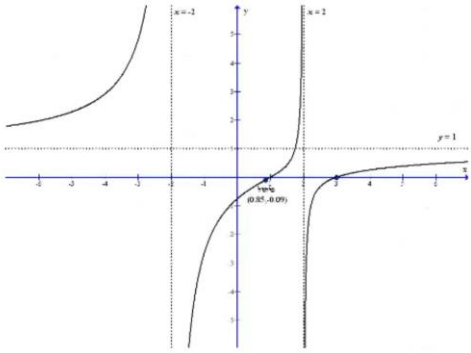
5)



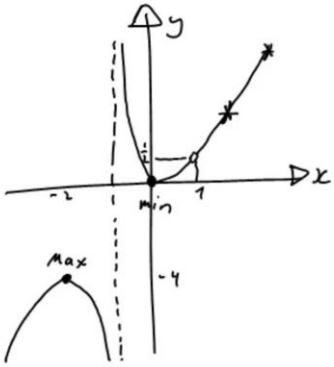
6)



7)



8)



כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה מעריכית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=x-e^{x}$

2) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

3) $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

4) $f(x)=x\cdot e^{-2x^{2}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: -1, עם ציר ה- x: אין (ראו בהרחבה בסרטון).
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y=x$ ב- $-\infty$ בלבד.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,-1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל x.

2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: אין.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $\left(-0.5,e^{-2}\right)$.
תחום קמירות: $-0.5<x<0$ or $x>0$, תחום קעירות: $x<-0.5$.

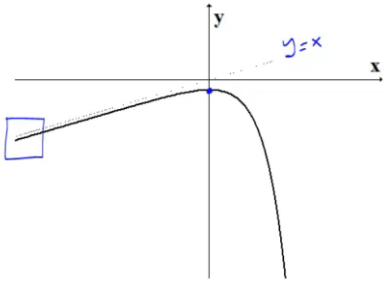
3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: -2.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת: הישר $y=x+3$ ב- $\pm\infty$.
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-1,e^{-1}\right)$, מינימום: $\left(2,4e^{\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $x<-1$ or $x>2$, ירידה: $-1<x<0$ or $0<x<2$.
נקודת פיתול: $\left(-0.4,1.6e^{-2.5}\right)$.
תחום קמירות: $-0.4<x<0$ or $x>0$, תחום קעירות: $x<-0.4$.

4) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, מינימום: $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, ירידה: $x<-\frac{1}{2}$ or $x>\frac{1}{2}$.
נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{3}{4}},\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}},-\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $(0,0)$.
תחום קמירות: $-\sqrt{\frac{3}{4}}<x<0$ or $x>\sqrt{\frac{3}{4}}$, תחום קעירות:
$0<x<\sqrt{\frac{3}{4}}$ or $x<-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

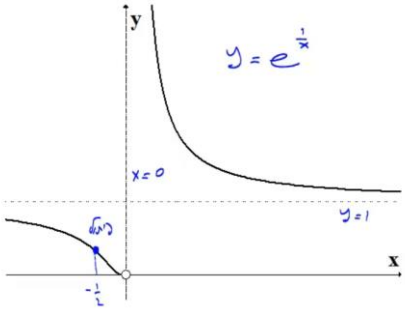
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרפים

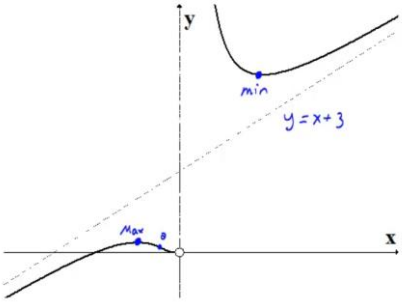
1)



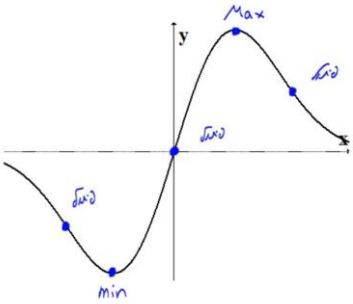
2)



3)



4)



כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה לוגריתמית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

2) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

3) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

4) $f(x)=x\cdot\ln x$

5) $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

6) $f(x)=4\ln^2 x-4\ln x-3$

7) $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- ∞.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e,\frac{1}{e}\right)$.
תחום עלייה: $0<x<e$, ירידה: $x>e$.
נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},\frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
תחום קמירות: $x>e^{1.5}$, קעירות: $0<x<e^{1.5}$.

2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x=0$,
משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- ∞.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2,\frac{2}{e}\right)$.
תחום עלייה: $0<x<e^2$, ירידה: $x>e^2$.
נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}},\frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$. תחום קמירות: $0<x<e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x>e^{\frac{8}{3}}$.

3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x<2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: $y=-\frac{1}{2}\ln 2$, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$, משופעת: אין.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-e^{-1}\right)$.
תחום עלייה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: $x=e^{-3},\ x=e^{1}$.

אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-4\right)$.

תחום עלייה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.

נקודת פיתול: $(1,-3)$. תחום קמירות: $x>1$, קעירות: $0<x<1$.

6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: $x=e^{-0.5},\ x=e^{1.5}$.

אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{\frac{1}{2}},-4\right)$.

תחום עלייה: $x>e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0<x<e^{\frac{1}{2}}$.

נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},0\right)$. תחום קמירות: $0<x<1.5$, קעירות: $x>1.5$.

7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0,\ x\neq 1$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: אין.

אסימפטוטה אנכית: $x=1$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},2\right),(e,2)$.

תחום עלייה: $e^{-1}<x<1\ \ or\ \ x>e$, ירידה: $x<e^{-1}\ \ or\ \ 1<x<e$.

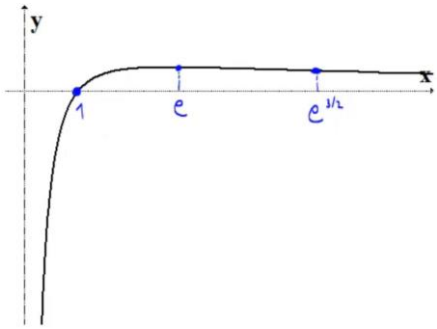
נקודת פיתול: $(5.15,3.06)$.

תחום קמירות: $0<x<1\ \ or\ \ 1<x<5.15$, קעירות: $x>5.15$.

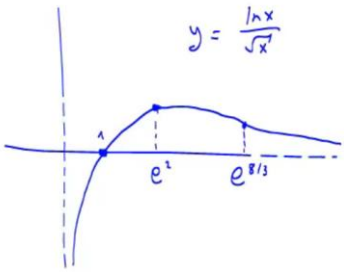
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרפים

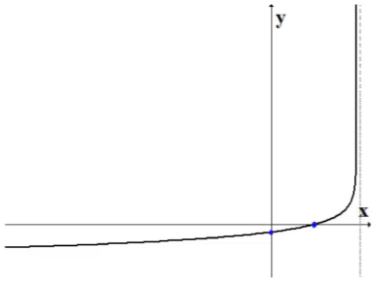
(1



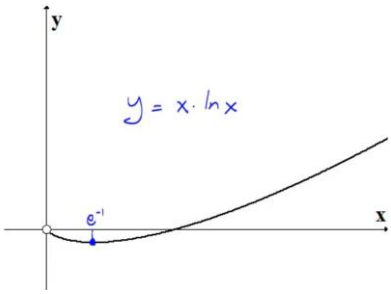
(2



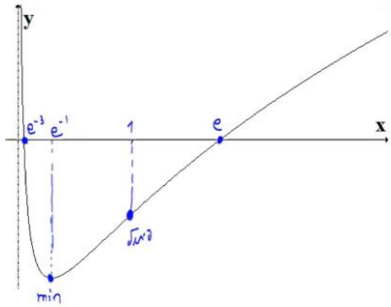
(3



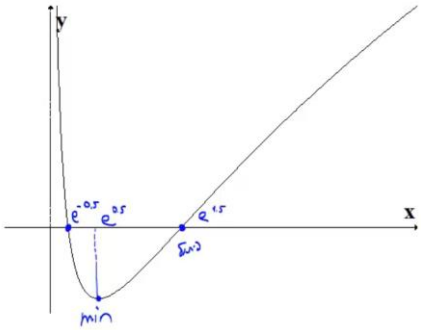
(4



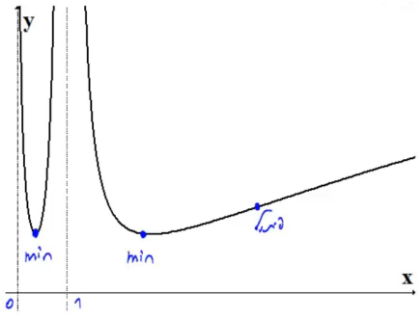
(5



(6



(7



כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה עם שורשים

שאלה

1) חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

תשובה

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 1, עם ציר ה- x: אין.

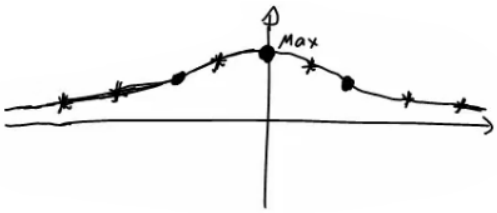
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y=0$.

נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.

נקודות פיתול: $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

תחום קמירות: $x<\sqrt{\frac{1}{2}}$ or $x<-\sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}}<x<\sqrt{\frac{1}{2}}$.

גרף:



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}$

2) $f(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)^2$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

4) $f(x)=\frac{|x-3|}{x-2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0 או 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5},0.326\right)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $0<x<\frac{2}{5}$, ירידה: $x>\frac{2}{5}$ or $x<0$.
נקודות פיתול: $(-0.2,0.41)$.
תחום קמירות: $x<-0.2$, קעירות: $-0.2<x<0$ or $x>0$.

2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 1, עם ציר ה- x: 1- או 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$, מינימום: $(1,0)$, $(-1,0)$.
תחום עלייה: $-1<x<0$ or $x>1$, ירידה: $0<x<1$ or $x<-1$.
נקודות פיתול: אין.
תחום קמירות: קמורה לכל x.

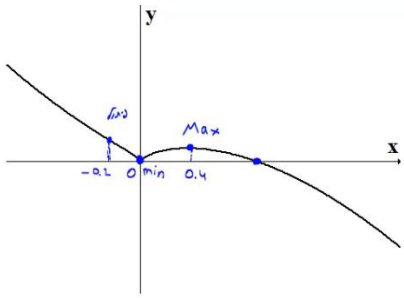
3) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: -1, עם ציר ה- x: ± 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,-1)$.
תחום עלייה: $0<x<1$ or $x>1$, ירידה: $-1<x<0$ or $x<-1$.
נקודות פיתול: $(1,0)$, $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<1$, קעירות: $x>1$ or $x<-1$.

4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: -1.5, עם ציר ה- x: 3.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$,
משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- ∞, ו- $y=-1$ ב- $-\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(3,0)$.
תחום עלייה: $x>3$, ירידה: $2<x<3$ or $x<2$.
נקודות פיתול: $(3,0)$.
תחום קמירות: $2<x<3$, קעירות: $x>3$ or $x<2$.

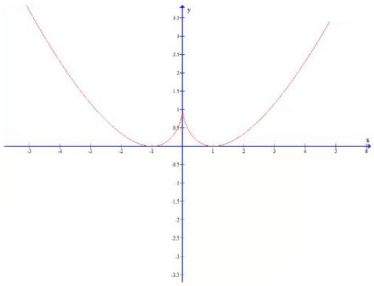
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרפים

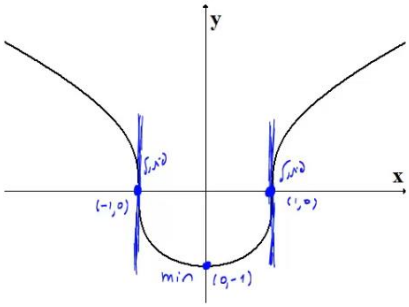
1)



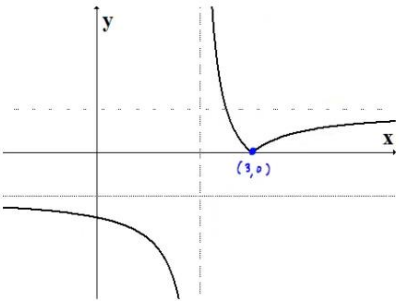
2)



3)



4)



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה טריגונומטרית

שאלות

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\cos x$ בתחום $[0,2\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=4x-3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. מציאת אסימפטוטות אנכיות.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0,\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^2 x-\cos x-2$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה הבאה: $y=(\sin x+1)\cdot\cos x$ בתחום: $0\le x\le 1.5\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x\cdot(\sin x+1)=1$ בתחום הנתון?

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$.

א. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[0,\pi]$.

ב. הוכח שהפונקציה זוגית.

ג. שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi,\pi]$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan 2x-8\sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi<x<0.25\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

8) $f(x)=8\cos x+2\cos 2x-3$, $[0,2\pi]$

9) $f(x)=2\cos^2 x-\sin 2x$, $[0,\pi]$

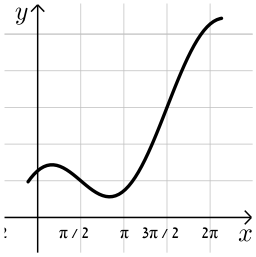
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $0<x<2\pi$.

ב. $\max(2\pi,2\pi+2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$, $\min(0,2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$.



ד. $(0,2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

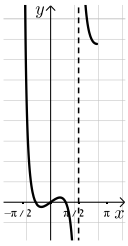
ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$,

קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$.

2) א. $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$

ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi,13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6},0.36\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{6},-0.36\right)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$.

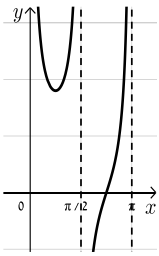


ד. $(0,0)$ ה. אנכית: $x=\frac{\pi}{2}$ ו. $(0,0)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6}\le x\le 0$,

קעירות כלפי מטה: $0<x<\frac{\pi}{2}$.

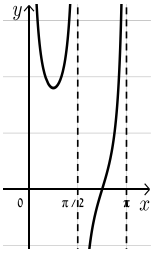
3) א. $0<x<\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ ב. $\min\left(\frac{\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$.



ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ תחומי ירידה: $0<x<\frac{\pi}{4}$

ד. $\left(\frac{3}{4}\pi,0\right)$ ה. אנכית: $x=\pi$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=0$.

4) א. $(\pi,0),(0,-2)$.



ב. $\max(\pi,0)$, $\min\left(\frac{\pi}{3},-2.25\right)$, $\max(0,-2)$, $\max(2\pi,-2)$, $\max\left(1\frac{2}{3}\pi,-2.25\right)$

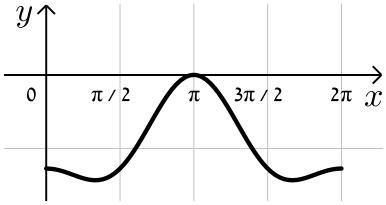
ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi<x<2\pi$, $\frac{\pi}{3}<x<\pi$, יורדת: $\pi<x<1\frac{2}{3}\pi$, $0<x<\frac{\pi}{3}$. גרף:

כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) א. $(0,1)$, $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

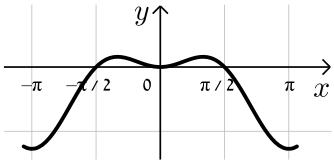
ב. $(1.5\pi,0),\left(\frac{5}{6}\pi,-1.29\right),\left(\frac{\pi}{6},1.29\right),(0,1)$

ד. 2 פתרונות.



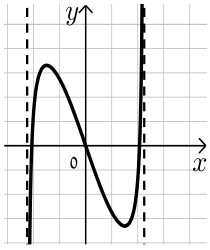
6) א. חיתוך: $(0,0),\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, קיצון: $\min(\pi,-2)$ קצה,

$\min(0,0),\ \max\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ קצה.



7) א. $(0,0),(\pm0.23\pi,0)$ ב. $x=\pm0.25\pi$.

ג. $\max\left(-\frac{\pi}{6},\sqrt{27}\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{6},-\sqrt{27}\right)$.



8) נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 7, עם ציר ה- x : $x=7$, $x=\frac{5\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$.

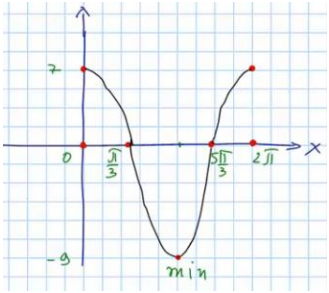
נקודות קיצון: מינימום: $(\pi,-9)$, מקסימום: $(2\pi,7)$, $(0,7)$.

נקודות פיתול: $x=\frac{5\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$.

תחום קמירות: $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$,

קעירות: $0<x<\frac{\pi}{3}$ or $\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$.

תחום עלייה: $x>3$, ירידה: $2<x<3$ or $x<2$.



9) נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 2, עם ציר ה- x : $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{4}$.

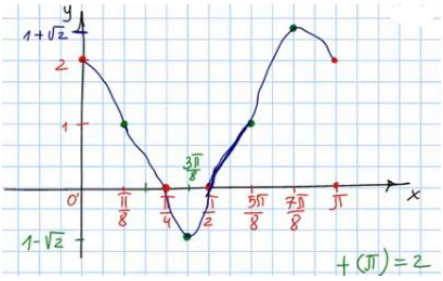
נקודות קיצון: מינימום: $\left(\frac{3\pi}{8},1-\sqrt{2}\right)$, מקסימום: $\left(\frac{7\pi}{8},1+\sqrt{2}\right)$.

תחום עלייה: $\frac{3\pi}{8}<x<\frac{7\pi}{8}$, ירידה: $\frac{7\pi}{8}<x<\pi$ or $0<x<\frac{3\pi}{8}$.

נקודות פיתול: $\left(\frac{5\pi}{8},1\right)$, $\left(\frac{\pi}{8},1\right)$.

תחום קמירות: $\frac{\pi}{8}<x<\frac{5\pi}{8}$,

קעירות: $\frac{5\pi}{8}<x<\pi$ or $0<x<\frac{\pi}{8}$.



כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x) = x - 2\arctan x$

2) $f(x) = \arcsin(\sin x)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

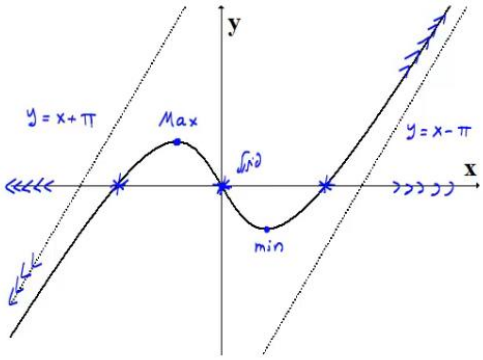
תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: אי-זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין,
משופעת: הישר $y=x+\pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-1,0.575)$, מינימום: $(1,-0.575)$.
תחום עלייה: $x>1$ or $x<-1$, ירידה: $-1<x<1$.
נקודות פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $x<0$.

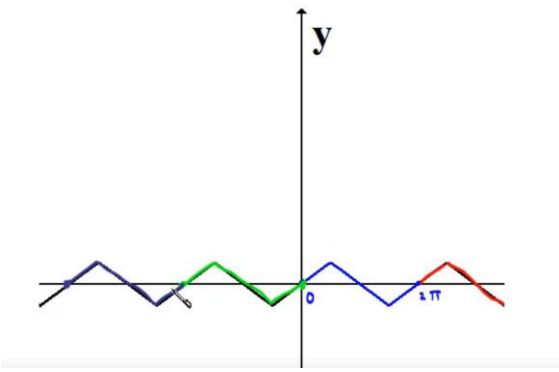
2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: אי-זוגית.
מחזוריות: כן, ממחזור 2π.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: $x=0,\ \pi,\ 2\pi$.
אסימפטוטה אנכית: אין,
משופעת: הישר $y=x+\pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, מינימום: $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right)$.
תחום עלייה: $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ or $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$, ירידה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.
נקודות פיתול: אין.

גרפים

1)



2)



כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה לכלכלנים

פרק 9 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

1. בעיות קיצון בהנדסת המישור 96
2. בעיות קיצון בהנדסת המרחב 100
3. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים 102
4. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים 106
5. בעיות קיצון עם תשובה נתונה 107

בעיות קיצון בהנדסת המישור

שאלות

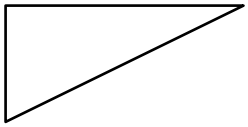
1) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ, מצאו את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

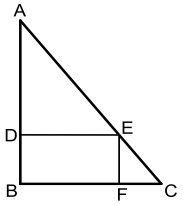
א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם a, מצאו את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

ב. הוכיחו: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.

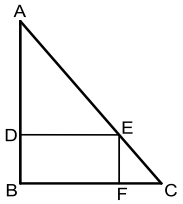
3) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ.
מה צריך להיות אורך כל ניצב,
כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



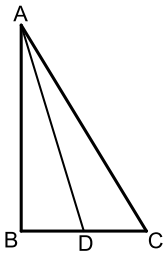
4) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$)
הנקודה E נמצאת על היתר AC,
כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.
נתון: $AB=$ 20 ס"מ , $BC=$ 16 ס"מ.
מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



5) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$),
הנקודה E נמצאת על היתר AC,
כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.
נתון: $AB=a$, $BC=b$.
מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.

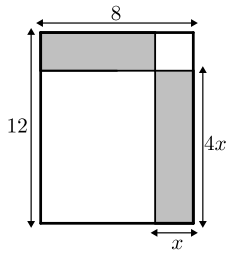


6) במשולש ישר הזווית ABC ($\sphericalangle B=90°$),
AD הוא תיכון לניצב BC.
ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ.
מצאו מה צריכים להיות אורכי הניצבים,
עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.

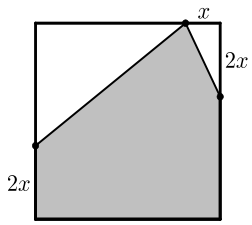


כתב ופתר – גיא סלומון ©

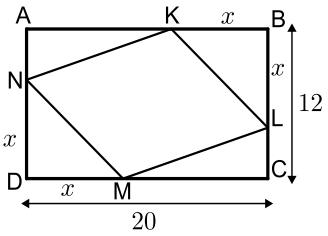
7) נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ, כמתואר באיור.
מקצים קטעים באורכים של x ו- $4x$ על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקווים.
מצאו את x, עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.



8) נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ.
מקצים קטע שאורכו x על הצלע העליונה,
ושני קטעים שאורכם $2x$ על הצלעות הצדדיות,
כמתואר באיור, כך שנוצר המחומש המקווקו.
מצאו מה צריך להיות ערכו של x,
עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.



9) הנקודות K, L, M ו-N מקצות קטעים שווים במלבן ABCD, כך ש:
$BK = BL = DM = DN = x$.
צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.

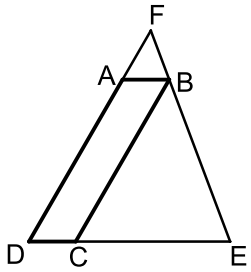


א. הביעו באמצעות x את סכום שטחי המשולשים $\Delta AKN + \Delta KBL + \Delta CLM + \Delta DNM$.

ב. מצאו מה צריך להיות x, כדי ששטח המרובע LKNM יהיה מקסימלי.

ג. מהו השטח של המרובע LKNM, במקרה זה?

10) המרובע ABCD הוא מקבילית.
מהקודקוד B מעבירים את הצלע EF,
הנפגשת עם המשכי הצלעות DC ו-AD.
ידוע כי מידות המקבילית הן:
$AB =$ 2 ס"מ, $AD =$ 8 ס"מ.
נסמן את אורך הצלע DE ב- x.



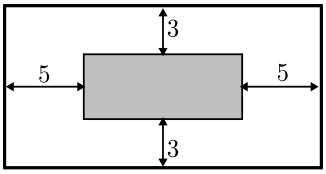
א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע DF.

ב. מצאו את x, עבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.

ג. מה הוא הסכום המינימלי?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) חיים הוא אחד מעובדי חברת 'דפוס יהלום בע"מ'.
תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי,
כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון,
ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).

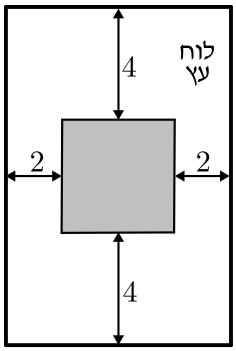


יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי,
ששאל אותו את השאלה הבאה:
"יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות,
אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.
מה הן המידות של גלויה, אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?".

א. עזרו לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראו דרך חישוב.

ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?

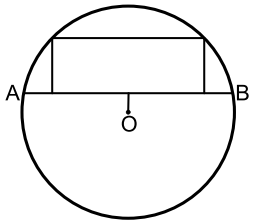
12) אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה:
יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ,
ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר,
כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ,
ובקצוות העליון והתחתון – 4 ס"מ (ראה איור).
כדי לבחור את מידות לוח העץ,
אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי
שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).



א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

13) במעגל שמרכזו O ורדיוסו $10\sqrt{5}$ ס"מ העבירו
מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס"מ.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

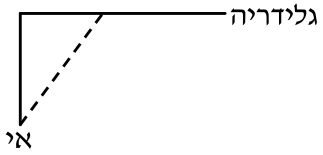


14) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB
שמרחקו ממרכז המעגל הוא a.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

15) שני רוכבים יוצאים בו זמנית לדרכם:
האחד מעיר A מערבה לעיר B, והשני מעיר B דרומה לעיר C.
המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ.
מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש
ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש.
כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי?
מצאו גם את המרחק המינימלי.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק״מ מהחוף.
על החוף, במרחק של 3 ק״מ מהנקודה
הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה.
האדם שוחה במהירות של 8 קמ״ש
ורץ על החוף במהירות של 10 קמ״ש.
לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות,
כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?



17) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו
ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת.
שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ״ר.
מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC)
הוא 120 ₪ למטר,
ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר.
מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

תשובות סופיות

1) $4\sqrt{3}$ ס״מ.

2) א. 2.5 ס״מ.

3) א. 6 ס״מ ו- 6 ס״מ ב. 18 סמ״ר. ג. $6\sqrt{2}\approx 8.48$ ס״מ.

4) 80 סמ״ר $= S$.

5) $\frac{ab}{4}$ יחידות שטח.

6) 4 ס״מ, 16 ס״מ.

7) $x=2.75$

8) $x=6$

9) א. $2x^2-32x+240$ ב. $x=8$ ג. 128 סמ״ר $= S$.

10) א. $\mathrm{DF}=\frac{8x}{x-2}$ ב. $x=6\ ,\ L=\frac{x^2+6x}{x-2}$ ג. $L=18$

11) א. 6 ס״מ על 10 ס״מ. ב. 12 ס״מ על 20 ס״מ.

12) א. 11 ס״מ על 22 ס״מ. ב. $S=98$

13) 92 ס״מ.

14) $2\sqrt{5}R-2a$ יחידות אורך.

15) 4 שעות, המרחק: $\sqrt{80}$ ק״מ.

16) $2\frac{1}{3}$ ק״מ.

17) $4\cdot 6$

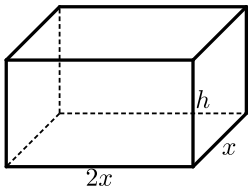
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות קיצון בהנדסת המרחב

שאלות

1) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר.
מצאו את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.

2) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן,
שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה,
כמתואר באיור.
ידוע כי גובה התיבה h וצלע המלבן הקטנה x
מקיימים: $x+h=9$.
מצאו מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה
כדי שנפחה יהיה מקסימלי.

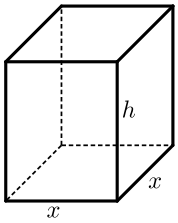


3) נתונה תיבה שגובהה הוא h ובסיסה הוא ריבוע
שאורך צלעו היא x.
נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים
$4x+h=63$.

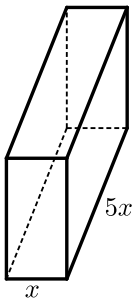
א. הביעו את h באמצעות x.

ב. הביעו את שטח הפנים של התיבה
באמצעות x.

ג. מה צריך להיות ערכו של x, כדי ששטח
הפנים יהיה מקסימלי?



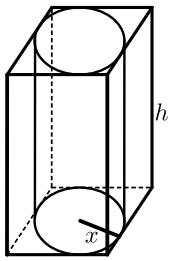
4) ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה
ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק.
יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5
מרוחבו, כמתואר באיור הסמוך.
כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת, ולכן הוא
רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח
שעליו להשתמש, כדי להשיג את מבוקשו.
מצאו את כמות הפח המינימלית.



5) לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה,
דרושים שני חומרים, ולהם שני מחירים שונים:
החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון.
מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

6) מכל הגלילים הישרים, שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא k,
מצאו את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©



7) באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע, וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- x וגובהו ב- h.
ידוע כי הסכום של x ו- h הוא 12 ס"מ.

א. הביעו באמצעות x את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.

ב. הביעו באמצעות x

1. את נפח הגליל.
2. את נפח התיבה.

ג. מצאו את x, עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

8) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא k ושטח המעטפת שלה הוא S.
הוכיחו כי $S < 2k^2$.

תשובות סופיות

1) $4\cdot4\cdot4$ ס"מ.

2) בסיס: 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה: 3 ס"מ.

3) א. $h = 63 - 4x$ ב. $p = -14x^2 + 252x$ ג. $x = 9$

4) 3 ס"מ, 15 ס"מ ו- 5 ס"מ.

5) $8\cdot6\cdot3$ ס"מ.

6) $\frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח $= V$.

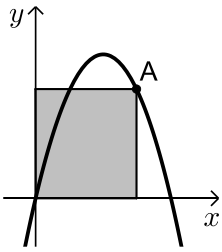
7) א. $2x$ ב. 1. $V = 12\pi x^2 - \pi x^3$ 2. $V = 48x^2 - 4x^3$ ג. $x = 8$

8) שאלת הוכחה.

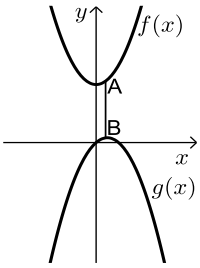
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

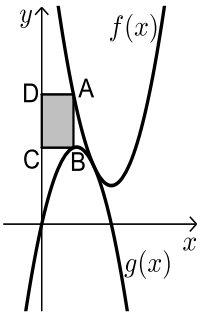
שאלות



1) נתונה הפונקציה $f(x)=6x-x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט.
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

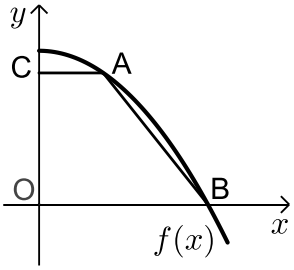


2) נתונות הפונקציות $f(x)=x^2+12$ ו- $g(x)=2x-x^2$, כמתואר באיור. הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, בהתאמה, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



3) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=x^2-8x+18$ ו- $g(x)=-x^2+4x$.
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . נעביר אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y , כך שנוצר מלבן (מסומן באיור).
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

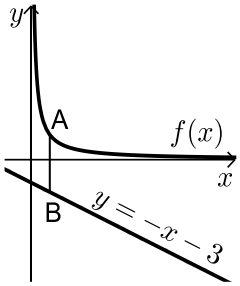
א. הביעו באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
ב. מצאו את ערכו של t , עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



4) נתונה הפונקציה: $f(x)=36-x^2$.
על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A.
מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה- x , שחותך את ציר ה- y בנקודה C.
הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x , ו-O ראשית הצירים.

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

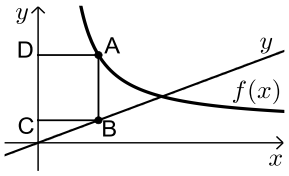


5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4}{x}$, ונתון הישר: $y=-x-3$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הישר, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



6) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציה: $f(x)=\frac{x+8}{x-1}$ והישר: $y=\frac{9x}{25}$.

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- y , כך שנוצר המלבן ABCD.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הביעו באמצעות t את היקף המלבן ABCD.

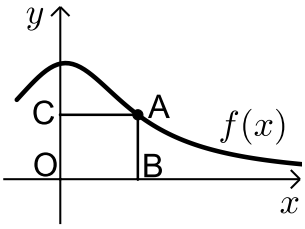
ב. מצאו את t , עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ונתון הישר $y=2x$.

בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן.

מצאו את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.



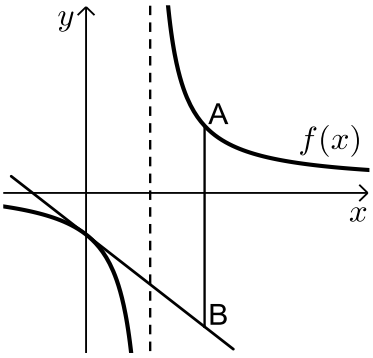
8) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+12}{x^2+3}$, בתחום: $x\ge 0$.

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO, כמתואר באיור.

א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©



9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+10}{x-2}$. מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y.

א. מצאו את משוואת המשיק.

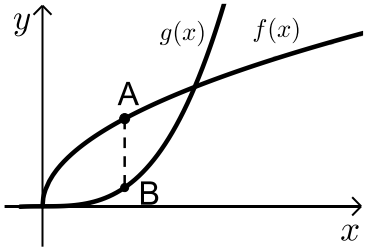
מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A, עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

10) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

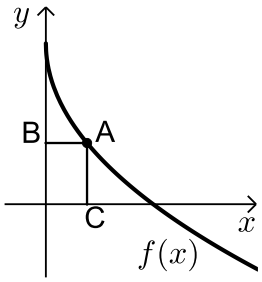
מצאו שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מַקְצֶה על הצירים הוא מינימלי.



11) נתונות הפונקציות $f(x)=2\sqrt{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{3}x^3$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה, על $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



12) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=6-3\sqrt{x}$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C, כמתואר באיור.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t.

א. הביעו באמצעות t את סכום הקטעים $AB+AC$.

ב. מצאו את ערכו של t, עבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.

13) נתונות הפונקציות $f(x)=1-x^2$ ו- $g(x)=bx^2$ $(b>0)$.

הפונקציות נחתכות בנקודות A ו-B.

מצאו את ערכו של b, שבעבורו הקטע AO מינימלי (O ראשית הצירים).

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $A(4,8)$

2) $A(0.5,12.25)$

3) א. $S=2t^3-12t^2+18t$ ב. $t=1$ ג. $S=8$

4) א. $A(2,32)$ ב. $S=128$

5) $A(2,2)$

6) א. $P=\frac{1.28t^2+0.72t+16}{t-1}$ ב. $t=4\frac{3}{4}$ ג. $P=$ 12.88 ס"מ

7) $1\cdot 2$

8) א. $A(2,2)$ ב. $A(0,4)$

9) א. $y=-3x-5$ ב. $A(4,7)$ ג. $AB=24$

10) $\left(\sqrt{3},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

11) $A(1,2)$

12) א. $l=t+6-3\sqrt{t}$ ב. $t=2.25$

13) $b=1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

שאלות

1) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני.
מצאו מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.

2) מצאו את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו,
הסכום המתקבל יהיה מינימלי.

3) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
ב. כיצד תשתנה התוצאה, אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?

4) x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x+6y=60$.
א. הביעו את y באמצעות x.
ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y,
כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
ג. מהי המכפלה הנ"ל?

תשובות סופיות

1) $8,8,8$

2) 1

3) א. $12,12,12$ ב. $8,12,16$ ג. מקרה א'.

4) א. $y=10-\frac{x}{6}$ ב. $x=30\ ,\ y=5$ ג. $M=22500$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות קיצון עם תשובה נתונה

בעיות קיצון בהנדסת המרחב

1) נתונים שני מספרים חיוביים, p ו- q, שסכומם a.

הראו, שכאשר מתקיים $\frac{p}{q}=\frac{n}{m}$, ערך הביטוי $p^n q^m$ מקסימלי (כאשר n ו- m טבעיים).

2) הוכיחו שמכל החרוטים הישרים שנפחם πk סמ"ק, החרוט בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו $\sqrt[3]{6k}$ ס"מ.
(שטח מעטפת של חרוט הוא πRl , כאשר l הוא הקו היוצר של החרוט)

בעיית קיצון עם תנועה

3) מהירותו של רכב היא v קמ"ש ועליו לנסוע דרך של S ק"מ.

לרכב יש הוצאות נסיעה של $\frac{v}{400}$ ₪ לכל ק"מ נסיעה ו- $\frac{v^2}{200}+48$ ₪ לכל שעת נסיעה.
הראו שכדי שהוצאותיו יהיו מינימליות, על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה לכלכלנים

פרק 10 - אינטגרלים מיידיים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים..... 108

אינטגרלים מיידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-12** (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

1) $\int 4dx$ **2)** $\int x^4 dx$ **3)** $\int \frac{1}{x^2} dx$

4) $\int \sqrt{x} dx$ **5)** $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ **6)** $\int 4x^{10} dx$

7) $\int (2x^2 - x + 1) dx$ **8)** $\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx$ **9)** $\int (x^2+1)^2 dx$

10) $\int (x^2+1)(x+2) dx$ **11)** $\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx$ **12)** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **13-20**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)} + c$)

13) $\int (4x+1)^{10} dx$ **14)** $\int (x^2-2x+1)^{10} dx$ **15)** $\int \frac{4}{(x-2)^5} dx$

16) $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$ **17)** $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$ **18)** $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}$ **20)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **21-26**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

21) $\int \frac{1}{4x} dx$ **22)** $\int \frac{1+x+x^2}{x} dx$ **23)** $\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

24) $\int \frac{1}{4x-1} dx$ **25)** $\int \frac{x+3}{x+2} dx$ **26)** $\int \frac{4x+1}{x+2} dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **27-29**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$)

27) $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$

28) $\int\left(e^{x+1}\right)^2dx$

29) $\int\left(4\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

30) חשבו את האינטגרל: $\int\frac{2^x+4^{2x}+10^{3x}}{5^x}dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\ln a}+c$)

חשבו את האינטגרלים בשאלות **31-33**:

31) $\int\frac{1}{1+4x^2}dx$

32) $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

33) $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $4x+c$

2) $\frac{x^5}{5}+c$

3) $-\frac{1}{x}+c$

4) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$

5) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$

6) $\frac{4x^{11}}{11}+c$

7) $\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

8) $-\frac{1}{x^3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2}+c$

9) $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c$

10) $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+c$

11) $-\frac{1}{x}+2x+\frac{x^3}{3}+c$

12) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+c$

13) $\frac{(4x+11)^{11}}{44}+c$

14) $\frac{(x-1)^{21}}{21}+c$

15) $-\frac{1}{(x-2)^4}+c$

16) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4}+c$

17) $10\sqrt{2x+4}+c$

18) $-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$

19) $-\frac{2}{3}\left((x-1)^{3/2}+x^{3/2}\right)+c$

20) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+c$

21) $\frac{\ln|x|}{4}+c$

22) $\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+c$

23) $x+2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$

24) $\frac{\ln|4x-1|}{4}+c$

25) $x+\ln|x+2|+c$

26) $4\left(x-1.75\ln|x+2|\right)+c$

27) $\frac{e^{4x}}{4}-e^{-x}+c$

28) $\frac{e^{2x+2}}{2}+c$

29) $8e^{\frac{x}{2}}-\frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4}+c$

30) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}+\frac{(200)^x}{\ln(200)}+c$

31) $\frac{1}{2}\arctan(2x)+c$

32) $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c$

33) $-\left(x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה לכלכלנים

פרק 11 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

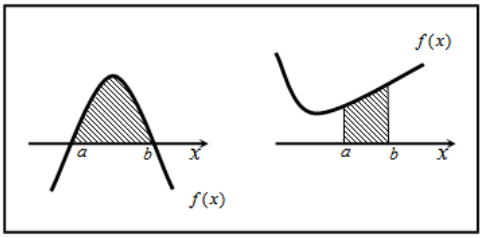
תוכן העניינים

1. חישוב שטחים 111
2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y 131
3. אורך קשת 132

חישוב שטחים

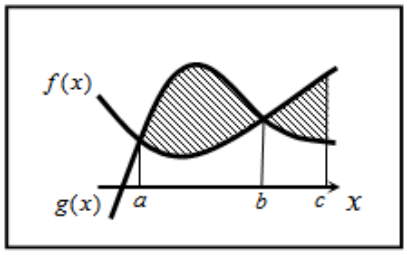
חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

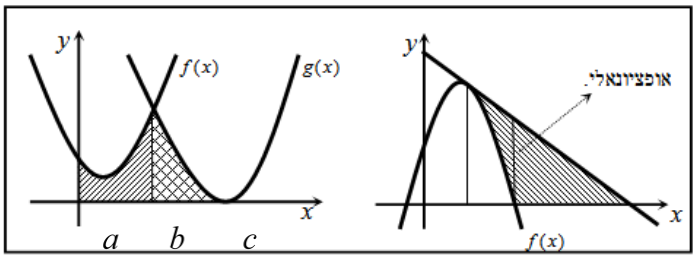


$$S_1=\int_a^b \left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$S_2=\int_b^c \left(f(x)-g(x)\right)dx$$

$$S=S_1+S_2$$

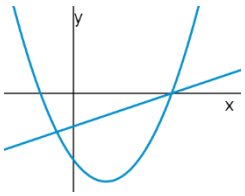
3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :



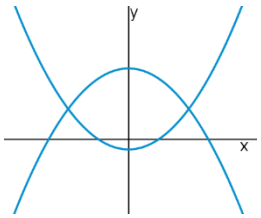
$$S=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c g(x)\,dx$$

שאלות

1) נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g.



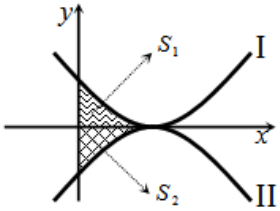
2) נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-1$, $g(x)=7-x^2$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של f ו- g.



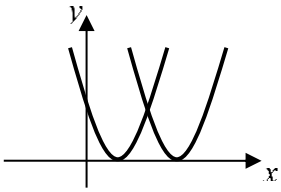
3) נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$,
כמתואר באיור.

א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
ב- S_1 ו- S_2, כמתואר באיור.
הראו כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.



4) נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-2x+1$, $g(x)=x^2-6x+9$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x.

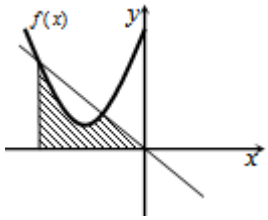


5) נתונה הפונקציה $f(x)=x^2+6x+12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
בנקודה שבה $x=-4$, כמתואר באיור.

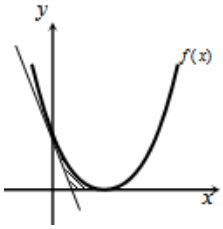
א. מצאו את משוואת הישר.

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x=-4$.



כתב ופתר – גיא סלומון ©

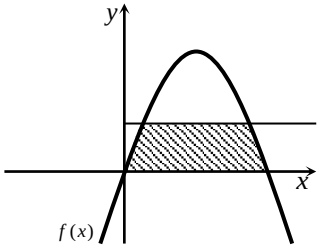


6) נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$.
בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y נעביר משיק.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).

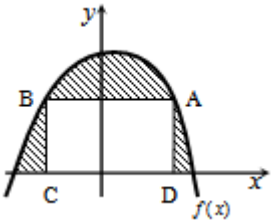


7) נתונה הפונקציה $f(x)=kx-x^2$.
הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות אלה הוא $x=9$.

א. מצאו את ערך הפרמטר k .

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

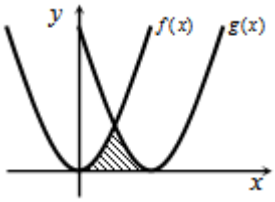
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).



8) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארת באיור שלהלן,
היא $f'(x)=3-2x$. ישר AB, שמשוואתו $y=6$
חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x ,
כך שנוצר מלבן ABCD.
ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא $x=4$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x (השטח המסומן).



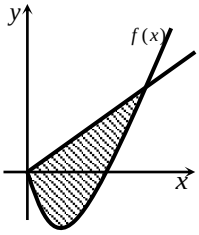
9) באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x)=x^2$
את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה שבה $x=2$.
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x)=2x-8$.

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (השטח המסומן).

כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.



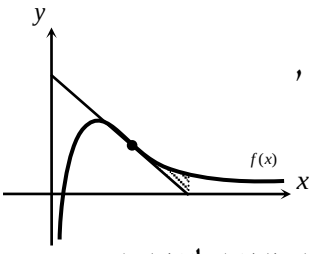
נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=2x-6$,
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה
בנקודה שבה ערך ה- y הוא $y=16$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

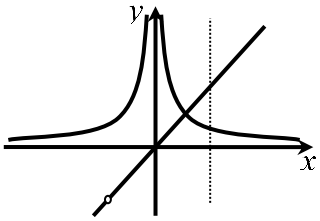
11) ענו על הסעיפים הבאים:



א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

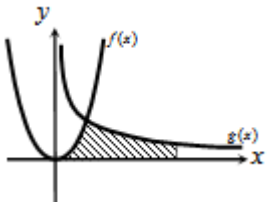
ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה
והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- x,
היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x.

12) נתונות שתי פונקציות $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.



חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה- x.

13) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות

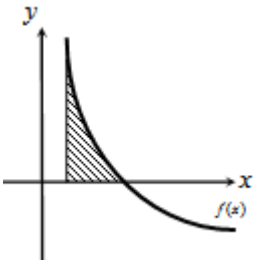


$f(x)=2x^2$ ו- $g(x)=\frac{a}{x^2}$ (a קבוע), בתחום $x>0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,
בנקודה הנמצאת על הישר $y=4x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $x=4$.

14) גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ (a קבוע)



חותך את ציר ה- x בנקודה $(6,0)$.

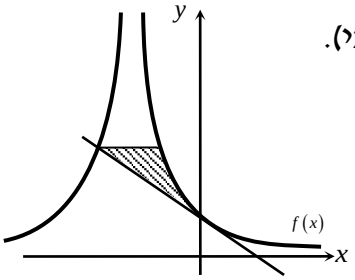
א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
ציר ה- x והישר $x=2$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{A}{(2x+A)^2}$ (A פרמטר חיובי).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y, הוא $-\frac{1}{9}$.



א. מצאו את ערך הפרמטר A.

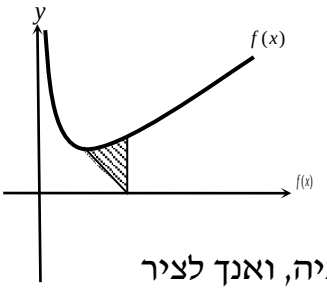
ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- y.

ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4.5$.

ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).

16) באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}+x$.

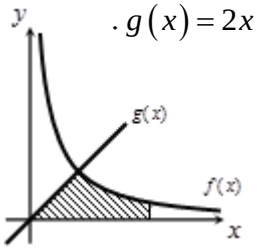


א. מצאו את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר ישר לנקודה $(2,0)$, שעל ציר ה- x.

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- x, היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

17) באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=2x$.



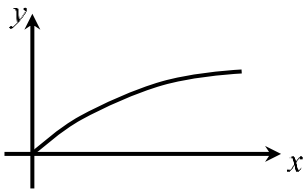
א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר $x=9$.

18) נתונה הפונקציה $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- y.

19) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.



לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

20) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

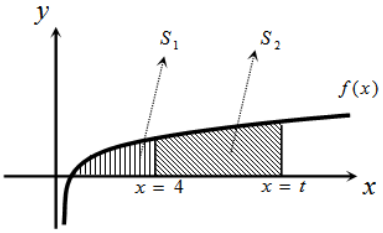
נעביר שני אנכים לציר ה- x, $x=4$ ו- $x=t$ (כאשר $t>4$).

נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x ב- S_1,

ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנכים ב- S_2.

ידוע כי $8S_1=S_2$.

מצאו את t.



21) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענו על הסעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.
3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא $m=\frac{17}{16}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

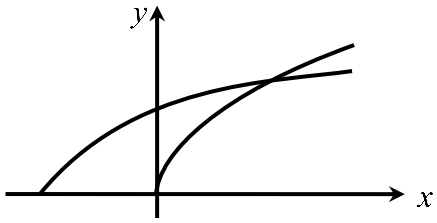
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

22) נתונות שתי פונקציות $g(x)=\sqrt{2x}$, $f(x)=\sqrt{x+b}$, כאשר $(b>0)$.

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה- x הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר b.



23) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$,

ברביע הראשון.

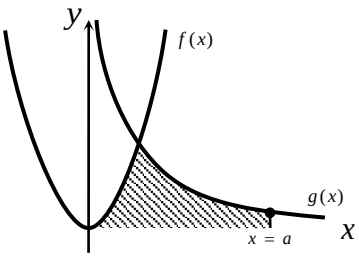
נעביר ישר $x=a$, החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה- x והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $S=85\frac{1}{3}$.

מצאו את a.

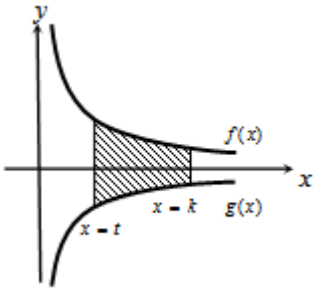


כתב ופתר – גיא סלומון ©

24) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

ידוע כי $AB=2CD$.

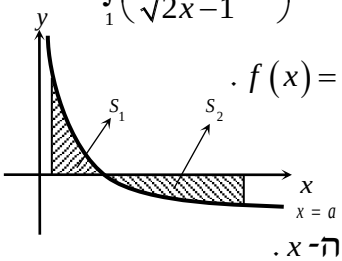


א. הראו כי $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות לבין הישרים $x=k$ ו- $x=t$, הוא $S=12$. מצאו את t.

25) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של a, $(a>1)$ יתקיים $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.



ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.

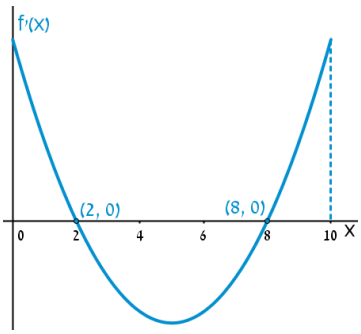
נעביר שני אנכים לציר ה-x, $x=1$ ו-$x=13$, כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2.

מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והאנך $x=1$, כלומר את S_1.

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו לכמה שווה השטח S_2. נמקו.



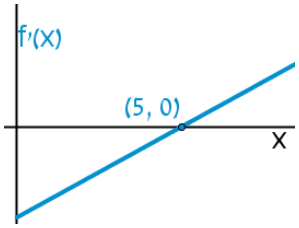
26) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$, וכן $f(10)>0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י **גרף הנגזרת** והצירים ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x=2$.

27) להלן גרף הפונקציה $f'(x)$, אשר חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד, $(5,0)$.



א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית, ואת התחומים שבהם היא שלילית.

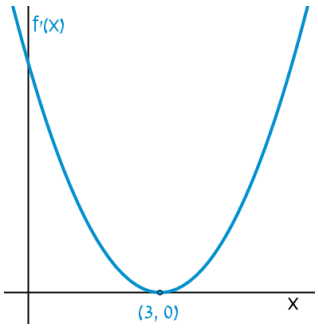
ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y שלה הוא $y=-2$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- y כאשר $y=8$.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים.

28) באיור שלהלן מתוארת הנגזרת $f'(x)$.

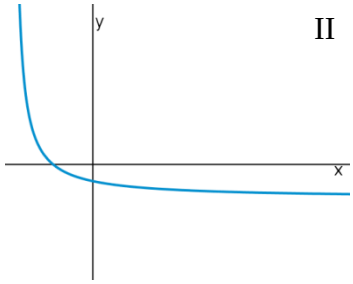


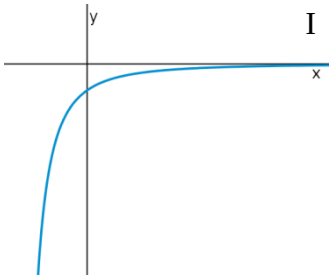
א. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי $f(3)=4$, וכי היא חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-5$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.

29) באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:



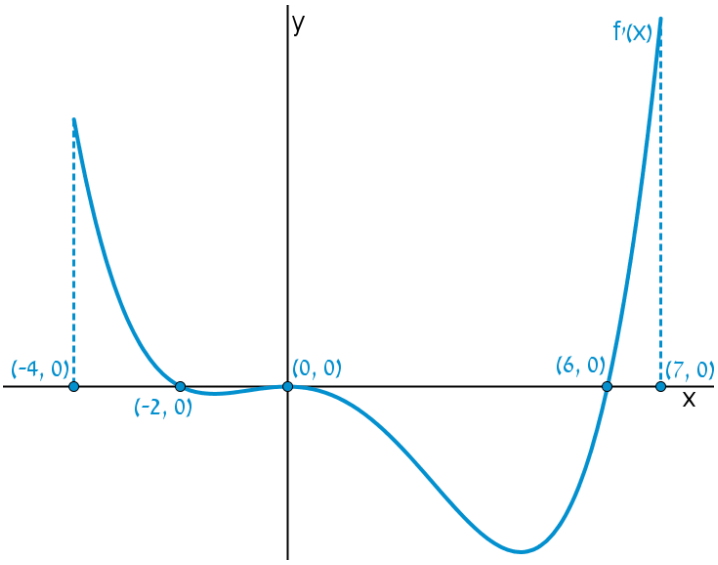


א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון $f(10)=-3$, וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-2$.
מהו השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

30) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:



א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$,

לפי הנתונים $f(0)=-2$, $f(-2)=7.6$ ו- $f(6)=-606.8$.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- x ברביע השלישי.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- x ברביע הרביעי.

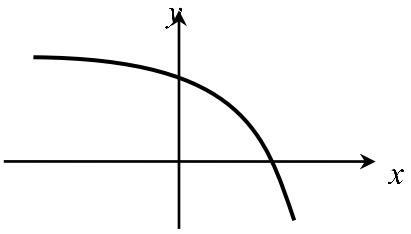
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$

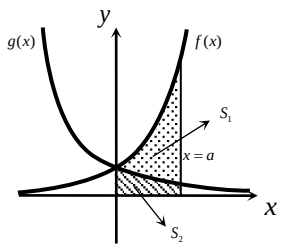
31) נתונה הפונקציה $f(x) = 5 - e^x$.
העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין
הפונקציה, המשיק וציר ה- x.
ניתן להשאיר e ו- $\ln$ בתשובה.



32) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{bx}$, כאשר $b > 0$.
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים
וציר ה- y הוא $\frac{e-2}{4}$.
מצאו את ערכו של הפרמטר b.

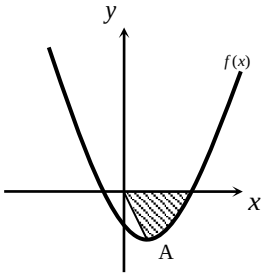
33) נתונות הפונקציות $g(x) = e^{-x}$ ו- $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני
הצירים. המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$,
ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- x, כך שנוצר מלבן.
הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

34) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
$f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x}$.
נעביר אנך לציר ה- x את הישר $x = a$,
כאשר $a > 0$, כמתואר באיור.
אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2.
ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2.
מצאו את a.



כתב ופתר – גיא סלומון ©

35) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x-1}-2ex-2$.



הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

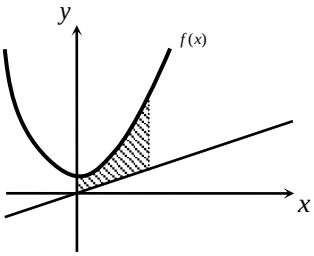
א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=1.7$.

36) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$.



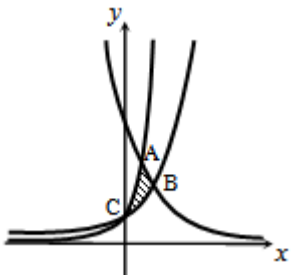
ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, והישר $y=0.1x$.

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- y והאנך $x=2$.

37) באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:



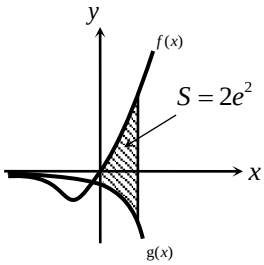
1. $f(x)=2^x$ 2. $g(x)=4^x$ 3. $h(x)=2^{4-2x}$

א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).

ג. חשבו את השטח המסומן באיור.

38) ענו על הסעיפים הבאים:



א. גזרו את הפונקציה $y=e^x(x-1)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $g(x)=-e^x$ ו- $f(x)=xe^x$.

נעביר ישר $x=a$, כאשר $a>0$, החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר (מקווקו).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.

מצאו את a .

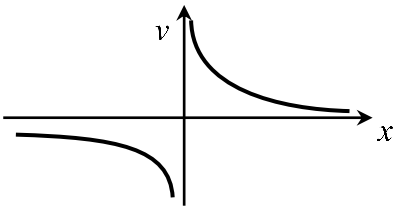
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציות לוגריתמיות

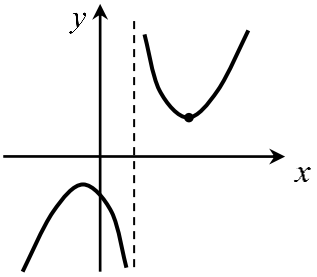
אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$

39) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=-1$ ו-$x=-4$ וציר ה-x.
ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.



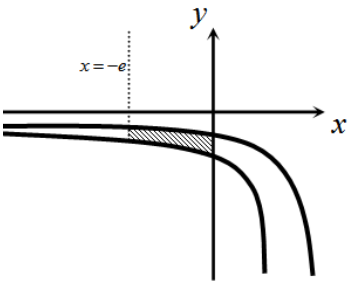
40) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$, ואנך לציר ה-x העובר בנקודת המינימום שלה.
אפשר להשאיר ביטוי עם $\ln$ בתשובה.



41) באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{a}{x-1}$ ו-$g(x)=\frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x<0$.
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצאו את a וכתבו את שתי הפונקציות.

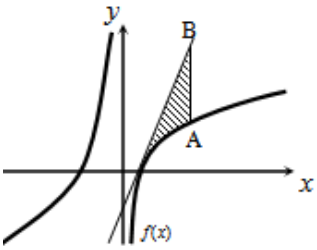
ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-y והישר $x=-e$.



כתב ופתר – גיא סלומון ©

42) נתונה הפונקציה $f(x)=7+ax+\frac{b}{x}$.

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x היא $y=18x-9$.



א. מצאו את a ו- b וכתבו את הפונקציה.

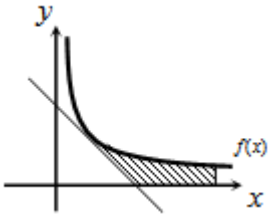
נעביר ישר המקביל לציר ה- y, שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

43) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=2$ היא $y=4-x$.

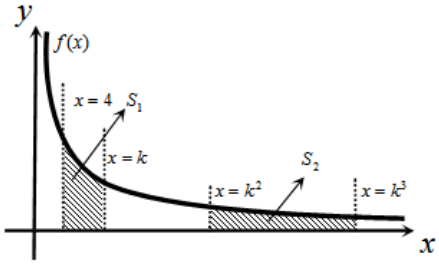


א. מצאו את $f(x)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x>0$.
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x=e^2$.

44) באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x}$, בתחום $x>0$.

נעביר את הישרים $x=k$, $x=k^2$, $x=k^3$ ו- $x=4$, כמתואר באיור $(x>4)$.



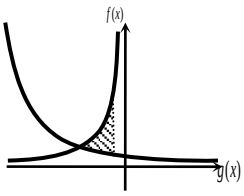
א. הביעו באמצעות k את השטחים S_1 ו- S_2.

ב. הראו כי ההפרש S_2-S_1 אינו תלוי ב- k, וחשבו את ערכו.

ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1.
מצאו את k.

45) נתונות הפונקציות $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו- $g(x)=\frac{k}{2x+5}$.

גרף $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y=0.4$.



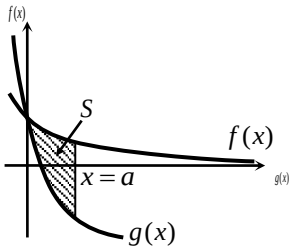
א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x=-1$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

46) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות
$f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)$,
בתחום $x\ge 0$.

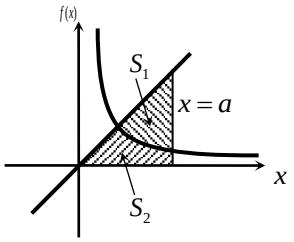


א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y.

ב. נעביר ישר $x=a$ $(a>1)$, המאונך לציר ה- x, חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).
מצאו את ערכו של a, עבורו מתקיים $S=4$.

47) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x)=\dfrac{2}{3x-1}$ והישר $y=x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.



נעביר אנך לציר ה- x, $x=a$, הנמצאו מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.
האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים S_1 ו- S_2, המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של a, עבורו השטח S_2 יהיה שווה ל- $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 7$.

ג. עבור ערך ה- a שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\dfrac{S_1}{S_2}$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

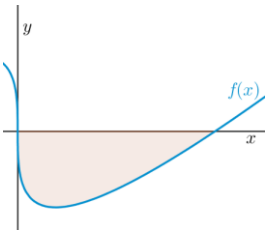
פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרלים מיידים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרל של פונקציה מורכבת	אינטגרל יסודי
$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx=\int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)}+c$	$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx=\int x^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+c$

תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n}\neq -1$.

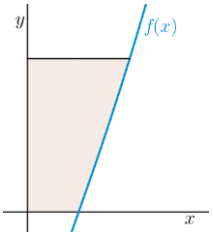
48) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.



א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

49) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

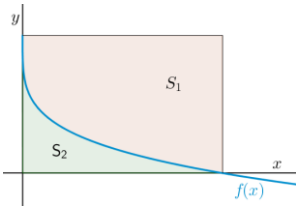


א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

ג. נעביר אנך לציר ה- y מהנקודה $(4,6)$.
חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.

50) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.

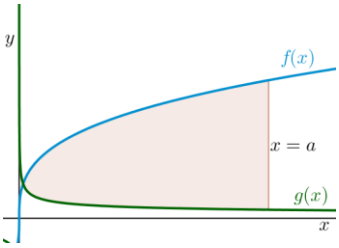


נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן,
ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- S_1,
ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2.

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

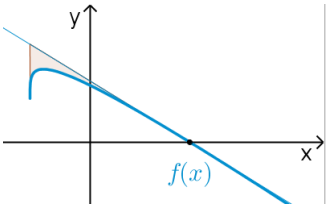
51) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=4\sqrt[3]{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.



א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום $x>0$.

ב. נעביר אנך לציר ה- x, $x=a$ (a פרמטר).
ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך, הוא $42\frac{3}{16}$ יח"ש.
מצאו את a.

52) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-ax$, a פרמטר.



ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=2$.

א. מצאו את הפרמטר a וכתבו את הפונקציה.

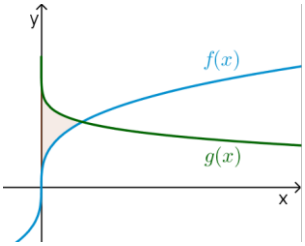
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x.

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאנו בסעיף ג'.
חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

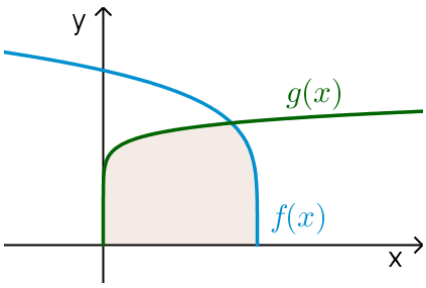
53) באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$ ו- $f(x)=\sqrt[3]{x}$.



א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y.

54) הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$.

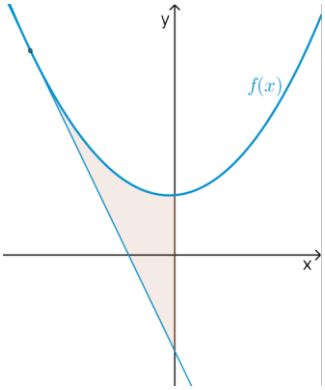


ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=1.2$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה $g(x)=\sqrt[10]{x}$ וציר ה- x.

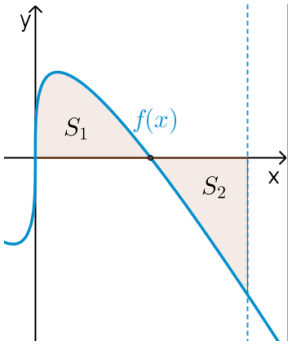
55) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{5-x}}+\frac{1}{2}x^2$.



א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-3$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .

56) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}-4x$.



א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 .
נעביר ישר $x=k$, אשר יוצר את השטח S_2 , כמתואר באיור.
מצאו את k , אם ידוע כי $S_1=S_2$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

3) א. $f(x)=\text{I}$, $g(x)=\text{II}$ ב. שאלת הוכחה.

4) $\frac{2}{3}$ יח"ש.

5) א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

6) א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

7) א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

8) א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

9) א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

10) א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

11) א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

12) 1 יח"ש.

13) א. $a=32$, $(2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

14) א. $a=36$, $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

15) א. $\text{A}=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ג. הוכחה. ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

16) א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

17) א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

18) 2.26 יח"ש.

19) 0.5 יח"ש.

20) $t=16$

21) א. i. $x>0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$ ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

22) $b=2$

23) $a=9$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

24) א. שאלת הוכחה. ב. $t=1$

25) א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=|-S_1|=2$.

26) ב. 10 יח"ש.

27) א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.
ג. $\min(5,-2)$ ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.

28) א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש.

29) א. $f'(x):\mathrm{I}$, $f(x):\mathrm{II}$ ב. 1 יח"ש.

30) א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

31) $S=0.192$ יח"ש.

32) $b=2$

33) שאלת הוכחה.

34) $a=\ln 2$

35) א. $\mathrm{A}(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=4.744$ יח"ש.

36) א. $a=-2$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52

37) ב. $\mathrm{C}(0,1)$, $\mathrm{B}\left(1\frac{1}{3},2.52\right)$, $\mathrm{A}(1,4)$ ג. $S=1.03$ יח"ש.

38) א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

39) $S=\ln 4$ יח"ש.

40) $S=4\ln 2-2$ יח"ש.

41) א. $a=2$, $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ ב. $S=1.76$ יח"ש.

42) א. $b=-4$, $a=2$, $f(x)=7+2x-\dfrac{4}{x}$ ב. $x=2$
ג. 11.54 יח"ש. $S=6+\ln 256\approx$

43) א. $f(x)=\dfrac{4}{x}$ ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.

44) א. $S_2=2\ln k$, $S_1=2\ln k-\ln 16$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$

45) א. $g(x)=\dfrac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$ יח"ש.

46) ב. $a=2$

47) א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\dfrac{S_1}{S_2}=5.955$

48) א. $(8,0)$, $(0,0)$ ב. $S=16$ יח"ש.

49) א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. $S=18.149$ יח"ש.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

50) $\frac{S_1}{S_2}=4$

51) א. $\left(\frac{1}{8},2\right)$ ב. $a=8$

52) א. $a=1$, $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-x$ ב. $x\geq -1.2$ ג. $(-1.2,1.2)$

ד. $y=-\frac{27}{32}x+\frac{27}{16}$ ה. $S=4.56$ יח"ש.

53) א. $(1,1)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש.

54) א. $f(x)=(6-5x)^{\frac{1}{5}}$ ב. $S=1\frac{5}{66}$ יח"ש.

55) א. $y=-2\frac{15}{16}x-\frac{45}{16}$ ב. $S=4.56$ יח"ש.

56) א. כל x. ב. $\left(-\frac{1}{8},0\right)$, $\left(\frac{1}{8},0\right)$, $(0,0)$ ג. $k=\left(\frac{3}{8}\right)^{1.5}=0.2296..$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב שטחים ביחס לציר ה-y

שאלות

1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=-x$ והישר $y=x+6$.

2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x=y^2+2$ והישר $y=x-8$.

תשובות סופיות

1) $20\frac{5}{6}$

2) $20\frac{5}{6}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אורך קשת

שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

1) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$

2) $(1\le x\le 8)\ ,\ y=x^{2/3}$

3) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}$

4) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$

5) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{1}{3}\sqrt{x}\left(3-x\right)$

6) $(1\le x\le 8)\ ,\ x^{2/3}+y^{2/3}=4$

7) $(0\le y\le 4)\ ,\ x=3y^{3/2}-1$

8) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\ln x$

9) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=x^2$

תשובות סופיות

1) $\frac{33}{16}$

2) $\frac{1}{9}\left\{\frac{40^{1.5}}{3}-\frac{13^{1.5}}{3}\right\}$

3) $\frac{1097}{480}$

4) 21

5) $\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{3}+\frac{2}{3}3^{1.5}\right\}$

6) 9

7) $\frac{8}{243}\left\{82^{1.5}-1\right\}$

8) $\left\{\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|\right\}-\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right\}$

9) $\sqrt{17}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)$ (Decimal: 3.16784)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©